

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ имени Д.В.СКОБЕЛЬЦЫНА

Н.В.Никитин, А.В.Попов, Д.В.Саврина

**Монте-Карло генератор редких радиационных
лептонных распадов B -мезонов для пакета
EvtGenExtras**

Препринт НИИЯФ МГУ N 2010-4/861

Москва, 2010 г.

УДК 539.12

Н.В.Никитин, А.В.Попов, Д.В.Саврина

e-mail: nnikit@mail.cern.ch, alexande-popov@yandex.ru, Daria.Savrina@cern.ch

**МОНТЕ-КАРЛО ГЕНЕРАТОР РЕДКИХ РАДИАЦИОННЫХ ЛЕПТОННЫХ
РАСПАДОВ B -МЕЗОНОВ ДЛЯ ПАКЕТА EvtGenExtras**

Препринт НИИЯФ МГУ N 2010–4/861

Аннотация

Настоящая работа посвящена описанию Монте-Карло генератора для моделирования редких радиационных распадов $B_{d,s}^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ с учетом эффектов CP -нарушения в рамках программных пакетов EvtGen и EvtGenExtras, входящих в официальное программное обеспечение коллаборации LHCb.

N.V.Nikitin, A.V.Popov, D.V.Savrina

e-mail: nnikit@mail.cern.ch, alexande-popov@yandex.ru, Daria.Savrina@cern.ch

**THE EvtGenExtras BASED MONTE-KARLO GENERATOR FOR RARE
RADIATIVE LEPTONIC B -MESONS DECAYS**

Preprint MSU SINP N 2010–4/861

Abstract

Here we present the complete manual for the simulation of rare radiative leptonic channels $B_{d,s}^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ with the CP -violation effects in the framework of the EvtGen and EvtGenExtras packages of the official LHCb software.

©Н.В.Никитин, А.В.Попов, Д.В.Саврина

©НИИЯФ МГУ, 2010, <http://www.sinp.msu.ru>

Содержание

Введение	4
1 Редкие радиационные лептонные распады B_q-мезонов с теоретической точки зрения.	7
1.1 Эффективный гамильтониан СМ для редких радиационных лептонных распадов B -мезонов	7
1.1.1 Эффективный гамильтониан переходов $b \rightarrow s, d$	7
1.1.2 Эффективный гамильтониан переходов $b \rightarrow q\ell^+\ell^-$ в СМ	9
1.2 Кинематика редких радиационных лептонных распадов B -мезонов	10
1.3 Формфакторы редких радиационных лептонных распадов \bar{B}_q^0 - и B_q^0 -мезонов	12
1.3.1 Формфакторы перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$	13
1.3.2 Формфакторы перехода $B_q^0 \rightarrow \gamma$	16
1.4 Матричный элемент для редких радиационных лептонных распадов B -мезонов	17
1.4.1 Матричный элемент без учета тормозного излучения лептонов	17
1.4.2 Вклад тормозного излучения лептонов в амплитуду	19
1.4.3 Элементы матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава	19
2 Реализация распадов $\bar{B}_q^0(B_q^0) \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma$ в программном пакете EvtGenExtras	20
2.1 Общее описание модели BSTOGLLMNT	20
2.1.1 Перечень файлов с кодом модели	20
2.1.2 Описание входных параметров	22
2.1.3 Пример дес-файла	23
2.1.4 Структура классов и описание некоторых методов	25
2.2 Дифференциальные распределения	26
2.2.1 Распределения по инвариантной димюонной массе	28
2.2.2 Угловые распределения	29
2.2.3 Зарядовая лептонная асимметрия и CP -нарушающие асимметрии	29
2.3 Дальнейшее развитие модели	35
Заключение и благодарности	36
Список литературы	37

Введение

Данная работа посвящена детальному описанию теоретических оснований и программной реализации Монте-Карло генератора для моделирования редких радиационных лептонных распадов B -мезонов в рамках программных пакетов EvtGen и EvtGenExtras, входящих в программное обеспечение (ПО) коллаборации LHCb.

Установка LHCb (The Large Hadron Collider beauty experiment) – одна из четырех больших установок, которые работают на протон-протонном ускорителе LHC (Large Hadron Collider) в Европейской лаборатории физики элементарных частиц CERN (Centre Européen de Recherche Nucléaire). Коллайдер, проектная энергия которого составляет 14 ТэВ в системе центра масс сталкивающихся протонов, в настоящее время работает при энергии в два раза ниже проектной. В мае 2010 года на LHC была достигнута светимость 8×10^{29} частиц/см² сек. К концу 2010 года ожидается выход на светимость 10^{32} частиц/см² сек, которая всего на порядок ниже минимальной проектной светимости. В 2011 году планируется стабильная десятимесячная работа коллайдера LHC в указанной выше конфигурации [1].

Детектор LHCb предназначен для исследования физики прелестных частиц, изучения эффектов CP -нарушения в распадах нейтральных $B_{d,s}^0$ -мезонов, регистрации редких распадов B -мезонов, распадов очарованных частиц (в основном, распадов D -мезонов) и экзотических распадов τ -лептона, которые сильно подавлены или запрещены в рамках стандартной модели (СМ). Наблюдение любого запрещенного в СМ распада или регистрация редкого распада с парциальной шириной, в несколько раз превосходящей ее предсказание для СМ, будет однозначно свидетельствовать в пользу "новой физики", хотя, возможно, и не позволит сделать однозначный выбор в пользу одного из расширений СМ.

Редкие радиационные лептонные распады $\bar{B}_{d,s}^0 \rightarrow \ell^+ \ell^- \gamma$ связаны с переходами $b \rightarrow s, d$, которые обусловлены нейтральным слабым током, нарушающим аромат. В рамках СМ подобный ток в низшем порядке теории возмущений возникает только начиная с петлевых диаграмм типа "пингвин" и "квадратик". Как показано в работах [2] – [4], парциальные ширины редких радиационных лептонных распадов имеют порядок от 10^{-8} для B_s -мезонов до 10^{-10} для B_d -мезонов. Существенный вклад в ширины редких радиационных лептонных распадов дают промежуточные состояния с участием легких векторных резонансов: ϕ – для B_s -мезонов, ρ^0 и ω – для B_d . Примеры диаграмм, дающих основной нерезонансный вклад в парциальные ширины распада $B_s^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$, показаны на рис.1.

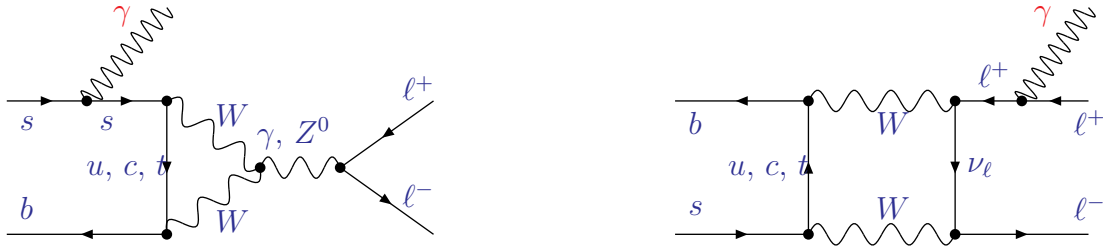


Рис. 1: Диаграммы типа "пингвин" (слева) и "квадратик" (справа) для распадов $B_s^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$.

Современный детектор является сложным аппаратно-программным комплексом, который в процессе измерения достаточно сильно искажает характеристики любого распада. Поэтому для сравнения предсказаний теории с результатами эксперимента и для изучения критериев отбора редкого сигнала в потоке фоновых событий необходимо проводить полное компьютерное моделирование возможности регистрации выбранного канала распада. Для распадов $\bar{B}_q(B_q) \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ на LHC такое моделирование включает в себя вычисление вероятности рождения B_q -мезона в протон-протонных столкновениях, нахождение при помощи монтекарловской процедуры кинематических характеристик продуктов распада, которые берутся с весом, равным квадрату модуля матричного элемента (*Generator Phase*), и моделирование отклика установки на прохождение этих продуктов распада (*Simulation Phase*).

В коллаборации LHCb для этих целей используется программная оболочка Gauss [5], состоящая из модуля генерации события и модуля прохождения события через установку LHCb. Для моделирования распадов прелестных адронов в рамках оболочки Gauss применяется программный пакет EvtGen [6, 7]. Подчеркнем, что версия пакета EvtGen, используемая коллаборацией LHCb, отличается от базовой версии [6]. Обсуждение некоторых различий можно найти в препринте [8]. Кроме того, коллаборация LHCb использует специальное дополнение к пакету EvtGen. Это дополнение носит название пакета EvtGenExtras и включает в себя Монте-Карло генераторы редких распадов B -мезонов, созданные сотрудниками коллаборации LHCb. Описание пакета EvtGenExtras отсутствует. Программный код различных версий пакета доступен по ссылке [9].

На сентябрь 2010 года последней версией пакета EvtGenExtras является версия v2r5. Версия содержит три модели: BTOSLLMS (модель детально описана в препринте [8] и внутренней публикации коллаборации LHCb [10]), BSTOGLLMNT (модель описана в настоящей работе) и BTOKSTARLLDURHAM07 (модель основана на формулах из работы [11], но не имеет подробного описания). Модель BTOSLLMS содержит четырнадцать различных каналов для редких

полулептонных распадов B -мезонов в рамках СМ. Модель `BTOKSTARLLDURHAM07` позволяет генерировать события только для двух каналов $B \rightarrow (K, K^*)\ell^+\ell^-$, однако, помимо СМ, содержит несколько ее расширений. К сожалению, в отсутствие описания, процедура выбора параметров “нестандартной физики” становится не вполне ясной, что затрудняет практическое использование указанной модели. Наконец, модель `BSTOGLLMNT` позволяет генерировать редкие радиационные лептонные распады в рамках СМ.

Пакет `EvtGenExtras` был создан в 2009 году Виллом Рисом (Will Reece). В настоящее время развитием пакета занимается группа НИИЯФ МГУ. В коллаборации ЛHCb за пакеты `EvtGen` и `EvtGenExtras` отвечают Mark Whitehead и Патрик Роб (Patrick Robbe).

Заметим, что модель `BSTOGLLMNT` на самом деле включает в себя шесть различных редких радиационных лептонных распадов $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$, где $q = \{d, s\}$, а $\ell = \{e, \mu, \tau\}$. Однако, следуя терминологии [8, 10], каналы с разными лептонными парами в конечном состоянии считаются за один распад. Поэтому далее всегда говорится только о двух каналах распадов, соответствующих распадам B_d^0 - и B_s^0 -мезонов.

Для моделирования распадов необходимо задать конкретный канал, например, $\bar{B}_s^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$. Это делается при помощи так называемых `dec`-файлов. Все `dec`-файлы, с которыми коллаборация ЛHCb проводит официальное моделирование, содержатся в пакете `DecFiles`. Описание правил составления `dec`-файлов для ЛHCb содержится в докладе [12]. Для проверки правильности работы моделей в рамках пакета `EvtGenExtras` предусмотрена специальная директория `../EvtGenExtras/testopts`, в которой могут содержаться вызываемые `dec`-файлы. Для каждой версии пакета Gauss путь к директории `/testopts` задается переменной окружения `$EVTGENEXTRASROOT/testopts`.

Описываемая в работе Монте-Карло модель редких радиационных лептонных распадов B -мезонов включена в официальное ПО коллаборации ЛHCb начиная с версии `EvtGenExtras v2r4` и `Gauss v38r6`. Использование модели `BSTOGLLMNT` для официальной генерации стало доступным после выхода пакетов `EvtGenExtras v2r5`, `Gauss v38r7` и `DecFiles v21r5`.

Препринт организован следующим образом. Во **Введении** даются определения основных терминов, используемых в работе. **Первый раздел** посвящен подробному описанию редких радиационных лептонных распадов B -мезонов с теоретической точки зрения. Во **втором разделе** представлено подробное описание модели `BSTOGLLMNT`. В **Заключении** сформулированы основные результаты работы.

1 Редкие радиационные лептонные распады B_q -мезонов с теоретической точки зрения.

Первый раздел настоящей публикации посвящен описанию редких радиационных лептонных распадов $\bar{B}_q^0(B_q^0) \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ с теоретической точки зрения. Такое описание необходимо для понимания логики построения модели BSTOGLLMNT и принципов ее работы¹.

Содержание раздела представляет собой компиляцию из основных результатов серии статей [2, 3, 4], записанных в удобных для программирования обозначениях.

1.1 Эффективный гамильтониан СМ для редких радиационных лептонных распадов B -мезонов

В настоящем подразделе дано краткое описание эффективного гамильтониана переходов $b \rightarrow q$ и $\bar{b} \rightarrow \bar{q}$, связанного с нейтральным током, нарушающим аромат, для случая СМ.

1.1.1 Эффективный гамильтониан переходов $b \rightarrow s, d$

Теоретическое описание переходов $b(\bar{b}) \rightarrow q(\bar{q})$, где $q = \{d, s\}$, с учетом эффектов CP -нарушения удобно проводить, используя эффективный гамильтониан $H_{\text{eff}}^{b \rightarrow q}$, записанный в форме вильсоновского разложения [13, 14, 15]:

$$H_{\text{eff}}^{b \rightarrow q} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{tq}^* \left[(1 + \lambda_u^{(q)}) \left(C_1(\mu) O_1^{(c)}(\mu) + C_2(\mu) O_2^{(c)}(\mu) \right) - \lambda_u^{(q)} \left(C_1(\mu) O_1^{(u)}(\mu) + C_2(\mu) O_2^{(u)}(\mu) \right) + \sum_{i=3}^{\dots} C_i(\mu) O_i(\mu) \right] + (\bar{b} \rightarrow \bar{q}), \quad (1)$$

где G_F – постоянная Ферми, $V_{q_1 q_2}$ – элементы матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава (ККМ-матрицы), $\lambda_u^{(q)} = V_{ub} V_{uq}^* / V_{tb} V_{tq}^*$. В формуле (1) величины $C_i(\mu)$ составляют набор вильсоновских коэффициентов. Их количество и явный вид зависят от выбранной модели (СМ, лево-правые модели, модели с суперсимметричными частицами и так далее) и приближения, в котором для данных коэффициентов учитывается вклад жестких глюонов. Для СМ в вильсоновские коэффициенты в низшем порядке по константам электромагнитного и слабого взаимодействий вносят вклад петлевые диаграммы типа “пингвин” и “квадратик”, а обмен

¹Необходимо отметить, что в настоящей статье термины “модель” и “Монте-Карло генератор” используются как слова-синонимы, поскольку модель любого распада является, по сути дела, монте-карловским генератором, использующим методы различных классов пакетов EvtGen и EvtGenExtras.

жесткими глюонами вычисляется в рамках КХД в главном логарифмическом и следующих за ним приближениях [14].

Масштабный параметр μ , который для данного класса задач по порядку величины равен массе b -кварка², разделяет жесткий и мягкий вклады от сильных взаимодействий. Мягкий вклад содержится в матричных элементах от базисных операторов $O_i(\mu)$ между начальным и конечным адронными состояниями. Матричные элементы включают в себя все допустимые лоренц-инвариантные структуры, составленные из 4-импульсов участвующих в распаде частиц, метрического тензора и полностью антисимметричного тензора 4-ого ранга. Соответствующие вычисления для редких радиационных лептонных распадов будут описаны в подразделе 1.3. Отметим, что точность вычислений адронных матричных элементов не превышает 15%. Численные значения вильсоновских коэффициентов чувствительны к выбору масштабного параметра μ . Для рассматриваемого круга задач $\mu \in [m_b/2, 2m_b]$. В приближении, следующим за главными логарифмами (NLO), точность вычисления коэффициентов Вильсона порядка 15%, а в следующем за ним приближении (NNLO) – порядка 7% вне области J/ψ - и ψ' -резонансов [14]. Поэтому для практических вычислений достаточно использовать NLO-приближение, поскольку его точность сопоставима с точностью вычисления адронных матричных элементов.

Ток-токовые операторы

$$\begin{aligned} O_1^{(Q)} &= (\bar{q}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b_\alpha) (\bar{Q}_\beta \gamma_\mu (1 - \gamma_5) Q_\beta) \quad \text{и} \\ O_2^{(Q)} &= (\bar{q}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b_\beta) (\bar{Q}_\beta \gamma_\mu (1 - \gamma_5) Q_\alpha) \end{aligned}$$

(где $Q = \{u, c\}$, α и β – цветовые индексы кварков) в эффективном гамильтониане (1) отвечают вкладу $u\bar{u}$ -, $c\bar{c}$ -пар и векторных резонансов с соответствующим кварковым составом. Эти операторы присутствуют как в СМ, так и в любых ее расширениях. Если не учитывать вклад мезонных осцилляций, то, как отмечено в работах [13], именно пропорциональные операторам $O_{1,2}^{(Q)}$ структуры отвечают за эффекты CP -нарушения в СМ.

²В данном случае не имеет значения, рассматривается ли конституентная, токовая или бегущая масса b -кварка, т.к. все они численно находятся в районе 5 ГэВ.

1.1.2 Эффективный гамильтониан переходов $b \rightarrow q\ell^+\ell^-$ в СМ

Редкие радиационные лептонные распады $\bar{B}_{d,s}^0$ - и $B_{d,s}^0$ -мезонов в стандартной модели описываются при помощи эффективного гамильтониана³ :

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}}^{\text{SM}b \rightarrow q\ell^+\ell^-} = & \quad (2) \\
= & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_{em}}{2\pi} V_{tb}V_{tq}^* \left[-2 \frac{C_{7\gamma}(\mu)}{s} (\bar{q} i\sigma_{\mu\nu} \{m_b (1 + \gamma^5) + m_q (1 - \gamma^5)\} q^\nu b) (\bar{\ell}\gamma^\mu\ell) + \right. \\
& + C_{9V}^{\text{eff}(q)}(\mu, s) (\bar{q}\gamma_\mu (1 - \gamma^5) b) (\bar{\ell}\gamma^\mu\ell) + C_{10A}(\mu) (\bar{q}\gamma_\mu (1 - \gamma^5) b) (\bar{\ell}\gamma^\mu\gamma^5\ell) \left. \right] + \\
& + \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_{em}}{2\pi} V_{tb}^*V_{tq} \left[2 \frac{C_{7\gamma}^*(\mu)}{s} (\bar{b} i\sigma_{\mu\nu} \{m_b (1 - \gamma^5) + m_q (1 + \gamma^5)\} q^\nu q) (\bar{\ell}\gamma^\mu\ell) + \right. \\
& + C_{9V}^{\text{eff}(\bar{q})}(\mu, s) (\bar{b}\gamma_\mu (1 - \gamma^5) q) (\bar{\ell}\gamma^\mu\ell) + C_{10A}^*(\mu) (\bar{b}\gamma_\mu (1 - \gamma^5) q) (\bar{\ell}\gamma^\mu\gamma^5\ell) \left. \right],
\end{aligned}$$

который является реализацией общего гамильтониана (1) для переходов $b(\bar{b}) \rightarrow q(\bar{q})\ell^+\ell^-$. Первые две строки описывают распады \bar{B}_q^0 -мезонов. Две последние – содержат информацию о распадах B_q^0 -мезонов. Мандельстамовская переменная s равна квадрату 4-импульса $\ell^+\ell^-$ -пары. Вильсоновские коэффициенты $C_{9V}^{\text{eff}(q)}(\mu, s)$ и $C_{9V}^{\text{eff}(\bar{q})}(\mu, s)$ содержат вклады $u\bar{u}$ - и $c\bar{c}$ -пар, ρ^0 -, ω -, J/ψ -, ψ' -, $\psi(3770)$ -, $\psi(4040)$ -, $\psi(4160)$ - и $\psi(4415)$ -резонансов согласно [13, 15]. При этом s -зависимость резонансного вклада модифицирована согласно требованиям работы [16].

Можно написать следующие выражения для эффективных коэффициентов

$$\begin{aligned}
C_{9V}^{\text{eff}(q)}(\mu, s) &= C_{9V}(\mu) + C_{\text{res}}^{(1)}(\mu, s) + \lambda_u^{(q)} C_{\text{res}}^{(2)}(\mu, s), \\
C_{9V}^{\text{eff}(\bar{q})}(\mu, s) &= C_{9V}^*(\mu) + C_{\text{res}}^{(1)}(\mu, s) + \lambda_u^{(q)*} C_{\text{res}}^{(2)}(\mu, s),
\end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
C_{9V} &= \left(1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \omega(s/m_b^2) \right) \tilde{C}_9^{NDR}(\mu) + \frac{2}{9} (3C_3 + C_4 + 3C_5 + C_6); \\
C_{\text{res}}^{(1)} &= (3C_1 + C_2 + 3C_3 + C_4 + 3C_5 + C_6) H\left(\frac{m_c}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} (4C_3 + 4C_4 + 3C_5 + C_6) h\left(1, \frac{s}{m_b^2}\right) - \frac{1}{2} (C_3 + 3C_4) h\left(\frac{m_d}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right); \\
C_{\text{res}}^{(2)} &= (3C_1 + C_2) \left[H\left(\frac{m_c}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) - H\left(\frac{m_u}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) \right],
\end{aligned} \quad (4)$$

³В настоящей работе используются следующие определения: $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга, $\varepsilon^{0123} = -1$, $e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}} > 0$, где α_{em} – постоянная тонкой структуры, m_b – масса b -кварка, m_q – масса легкого кварка d или s , m_Q – масса u - или c -кварка, M_1 – масса начального \bar{B}_q^0 (или B_q^0) мезона и m – масса заряженного лептона (ℓ^+ или ℓ^-).

а функции $\tilde{C}_9^{NDR}(\mu)$, $\omega(s/m_b^2)$ и $h(m_q/m_b, s/m_b^2)$ вычислены в [14]. Функции $H(m_Q/m_b, s/m_b^2)$ включают в себя как вклад $Q\bar{Q}$ -пар, так и вклад векторных резонансов с соответствующим кварковым составом:

$$H\left(\frac{m_c}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) = h\left(\frac{m_c}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) - \frac{3}{3C_1 + C_2} \frac{\pi}{\alpha_{\text{em}}^2} \sum_{V=J/\psi}^{\psi(4415)} \frac{s}{M_V} \frac{\Gamma(V \rightarrow \ell^+\ell^-)}{M_V^2 - s - iM_V\Gamma_V};$$

$$H\left(\frac{m_u}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) = h\left(\frac{m_u}{m_b}, \frac{s}{m_b^2}\right) - \frac{3}{3C_1 + C_2} \frac{\pi}{\sqrt{2}\alpha_{\text{em}}^2} \sum_{V=\rho}^{\omega} \frac{s}{M_V} \frac{\Gamma(V \rightarrow \ell^+\ell^-)}{M_V^2 - s - iM_V\Gamma_V}.$$

Дополнительный множитель $1/\sqrt{2}$ в резонансном вкладе для функции $H(m_u/m_b, s/m_b^2)$ учитывает кварковый состав ρ^0 - и ω -мезонов.

1.2 Кинематика редких радиационных лептонных распадов B -мезонов

Пусть p^μ – 4-импульс B_q^0 - или \bar{B}_q^0 -мезона, k^μ – 4-импульс фотона, k_1^μ – 4-импульс положительно заряженного лептона ℓ^+ и k_2^μ – 4-импульс отрицательно заряженного лептона ℓ^- (принятые соглашения показаны на рис.2). Эти 4-импульсы удовлетворяют следующим соотношением:

$$p = k + k_1 + k_2 = k + q; \quad p^2 = M_1^2; \quad q^2 = s; \quad k^2 = 0; \quad k_1^2 = k_2^2 = m^2.$$

Помимо 4-вектора $q = p - k$ удобно ввести 4-вектор $P = p + k$. В терминах q^μ и P^μ амплитуды редких радиационных лептонных распадов имеют особенно простой вид.

При программировании матричных элементов для монте-карловских генераторов удобно использовать безразмерные переменные. Поэтому аналитические результаты следующих подразделов будут выражены в переменных, нормированных на массу $\bar{B}_q^0(B_q^0)$ -мезона. Это безразмерные массы $\hat{m}_b = m_b/M_1$, $\hat{m}_q = m_q/M_1$, $\hat{m} = m/M_1$ и безразмерные мандельстамовские переменные:

$$\hat{s} = \frac{s}{M_1^2} \equiv \frac{q^2}{M_1^2} = \frac{(p-k)^2}{M_1^2}; \quad \hat{t} = \frac{(p-k_1)^2}{M_1^2}; \quad \hat{u} = \frac{(p-k_2)^2}{M_1^2},$$

связанные условием $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 1 + 2\hat{m}^2$. Переменная $s \equiv q^2$ носит название инвариантной массы лептонной пары или массы дилептонной пары.

Вычисления амплитуд редких радиационных лептонных распадов удобно проводить либо в системе покоя лептонной пары ($\ell^+\ell^-$ -пары), либо в системе покоя $B_q^0(\bar{B}_q^0)$ -мезона. Первая система отсчета предпочтительнее для теоретического вычисления спиральных амплитуд и

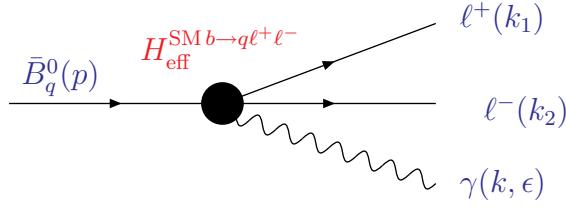


Рис. 2: Кинематика распадов $\bar{B}_q^0(p) \rightarrow \gamma(k, \epsilon) \ell^+(k_1) \ell^-(k_2)$.

связанных с ними эффектов [4]. Вторая – лучше приспособлена для написания амплитуд соответствующих распадов в рамках программных пакетов EvtGen и EvtGenExtras.

Пакет EvtGen содержит класс `EvtPhotonParticle` для описания поляризационных свойств фотона. Этот класс является производным базового класса описания частиц `EvtParticle` [6]. Расширенное по сравнению с оригинальным справочным руководством описание обоих классов можно найти в [8]. Метод `epsParentPhoton` класса `EvtPhotonParticle` задает поляризацию реального фотона при помощи двух комплексных 4-векторов, которые описывают состояния фотона с определенной спиральностью

$$\epsilon^{*\alpha}(\mathbf{k}, \lambda_\gamma = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \mp 1, i, 0).$$

Вектора поляризации фотона удовлетворяют условию поперечности:

$$\left(\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_\gamma = \pm 1), k \right) = 0. \quad (5)$$

Заметим, что и в системе покоя лептонной пары, и в системе покоя B_q -мезона возникает дополнительное соотношение (очевидно, что оно выполняется только в специально выбранных системах отсчета!) между 4-импульсом B_q -мезона и 4-векторами поляризации фотона:

$$\left(\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_\gamma = \pm 1), p \right) = 0. \quad (6)$$

При описании редких радиационных лептонных распадов в системе покоя лептонной пары пространственная система координат выбирается таким образом, чтобы волновой 3-вектор фотона \mathbf{k} был направлен вдоль оси z . Тогда 4-импульс фотона имеет следующие компоненты: $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, где $\omega = M_1(1 - \hat{s})/2\sqrt{\hat{s}}$. Направление 3-импульса \mathbf{k}_2 отрицательно заряженного лептона ℓ^- определяется единичным вектором $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Угол θ – это угол между направлениями 3-импульсов фотона и отрицательно заряженного лептона ℓ^- . Величина угла отсчитывается от оси z . Вместо угла θ иногда удобно ввести угол θ_+ между направлениями 3-импульсов фотона и положительно заряженного лептона ℓ^+ в системе покоя лептонной пары.

Для компонент 4-импульсов ℓ^+ и ℓ^- можно написать следующие выражения:

$$k_1^\mu = (\varepsilon_1, \mathbf{k}_1) = \frac{M_1 \sqrt{\hat{s}}}{2} (1, -D \mathbf{n}), \quad k_2^\mu = (\varepsilon_2, \mathbf{k}_2) = \frac{M_1 \sqrt{\hat{s}}}{2} (1, +D \mathbf{n}),$$

где $D = \sqrt{1 - 4\hat{m}^2/\hat{s}}$. В системе покоя лептонной пары 4-импульс $\bar{B}_q^0(B_q^0)$ -мезона имеет следующие компоненты:

$$p^\mu = (E, 0, 0, \omega) = \frac{M_1}{2\sqrt{\hat{s}}} (1 + \hat{s}, 0, 0, 1 - \hat{s}).$$

При вычислении трехчастичного фазового объема $d\Phi_3$ так же удобно работать в системе покоя лептонной пары. В качестве двух независимых переменных интегрирования целесообразно выбрать переменные \hat{s} и $\cos\theta$. Такой выбор сделан потому, что по умолчанию метод `initProbMax` класса `EvtDecayBase` пакета `EvtGen` ищет максимум амплитуды трехчастичного распада и выполняет монте-карловский розыгрыш кинематики именно в этих переменных (см. [8], параграф 1.9.3). Для выбранных переменных:

$$d\Phi_3 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p - k - k_1 - k_2)}{2\varepsilon_1 2\varepsilon_2 2\omega} \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{M_1^2 (1 - \hat{s})}{2^8 \pi^3} D d\hat{s} d\cos\theta.$$

Описание редких радиационных лептонных распадов в системе покоя $B_q^0(\bar{B}_q^0)$ -мезона также имеет свои преимущества. Во-первых, q^2 -зависимость формфакторов перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$ удобно представить как функцию энергии фотона ω_B в системе покоя $B_q^0(\bar{B}_q^0)$ -мезона [2]:

$$\omega_B = \frac{M_1}{2} (1 - \hat{s}). \quad (7)$$

Во-вторых, в пакете `EvtGen` предусмотрен целый ряд методов класса `EvtParticle`, которые позволяют получить 4-импульсы дочерних частиц в системе покоя родительской частицы, равно как и 4-импульс самой родительской частицы в ее системе покоя (последнее, впрочем, тривиально). Описание методов можно найти в препринте [8], параграф 1.7.1. Указанный набор методов делает предпочтительным построение амплитуды редкого радиационного лептонного распада именно в системе покоя $B_q^0(\bar{B}_q^0)$ -мезона.

1.3 Формфакторы редких радиационных лептонных распадов \bar{B}_q^0 - и B_q^0 -мезонов

Ниже определены формфакторы перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$ (где $q = \{d, s\}$). Формфакторы перехода $B_q^0 \rightarrow \gamma$ записаны через формфакторы $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$. В эффективных тензорном и псевдотензорном формфакторах учтены эффекты CP -нарушения.

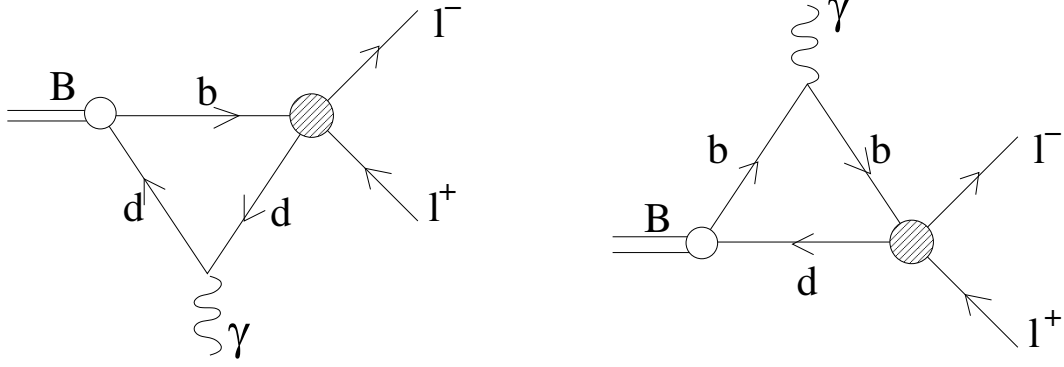


Рис. 3: Примеры диаграмм, когда реальный фотон излучается валентным b - или q -кварком. Темными кружками на диаграммах обозначены вершины, отвечающие вкладу эффективного гамильтониана (2).

1.3.1 Формфакторы перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$

Формфакторы перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$ определены следующим образом [2, 3]:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(k, \epsilon) | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 b | \bar{B}_q^0(p, M_1) \rangle &= i e \epsilon_\alpha^* \left(g_{\mu\alpha}(pk) - p_\alpha k_\mu \right) \frac{F_A(q^2)}{M_1}, \\ \langle \gamma(k, \epsilon) | \bar{q} \gamma_\mu b | \bar{B}_q^0(p, M_1) \rangle &= e \epsilon_\alpha^* \epsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi k_\eta \frac{F_V(q^2)}{M_1}, \\ \langle \gamma(k, \epsilon) | \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 b | \bar{B}_q^0(p, M_1) \rangle (p-k)_\nu &= e \epsilon_\alpha^* \left(g_{\mu\alpha}(pk) - p_\alpha k_\mu \right) F_{TA}(q^2, 0), \\ \langle \gamma(k, \epsilon) | \bar{q} \sigma_{\mu\nu} b | \bar{B}_q^0(p, M_1) \rangle (p-k)_\nu &= i e \epsilon_\alpha^* \epsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi k_\eta F_{TV}(q^2, 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Тензорный (F_{TV}) и псевдотензорный (F_{TA}) формфакторы зависят от 4-импульсов k реального ($k^2 = 0$) и $q = p - k$ виртуального ($q^2 = s$) фотонов (последний конвертируется в $\ell^+ \ell^-$ -пару). При этом в функциях $F_{TV, TA}(q_1^2, q_2^2)$ на первом месте всегда стоит квадрат импульса (реального или виртуального) фотона, который излучается за счет эффективной вершины, описываемой гамильтонианом переходов $b(\bar{b}) \rightarrow q(\bar{q}) (\ell^+ \ell^-, \gamma)$. При написании структур (8) учтено, что вектор поляризации фотона ϵ^* подчиняется условию поперечности (5).

Тензорный и псевдотензорный формфакторы в (8) относятся к процессам излучения реального фотона валентными кварками. Диаграммы, отвечающие таким процессам, представлены на рис.3.

В работе [2] формфакторы (8) были вычислены в рамках дисперсионной формулировки кварковой модели. Зависимость формфакторов от ω_B носит универсальный характер:

$$F_i(\omega_B) = \beta_i \frac{M_1 f_{B_q^0}}{\Delta_i + \omega_B}, \quad (9)$$

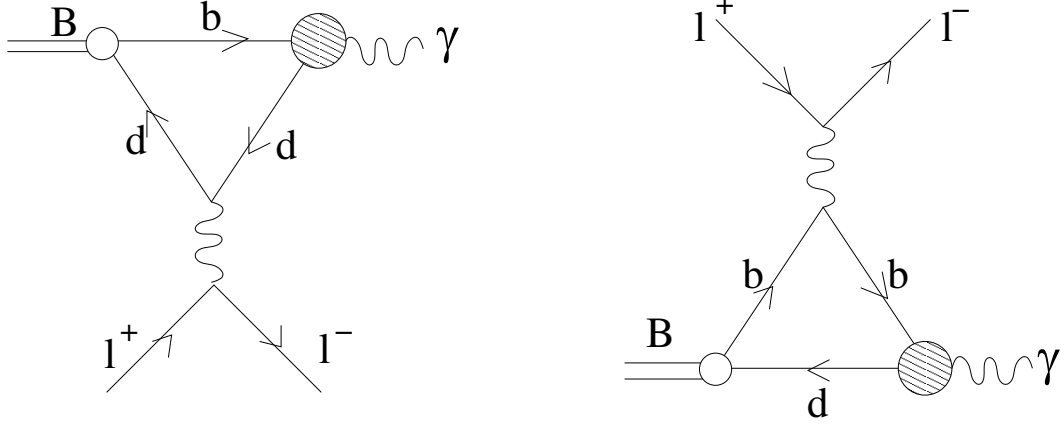


Рис. 4: Примеры диаграмм, когда виртуальный фотон излучается валентным b - или q -кварком. Темными кружками на диаграммах обозначены вершины, отвечающие вкладу от эффективного гамильтониана переходов $b(\bar{b}) \rightarrow q(\bar{q})\gamma$.

Таблица 1: Параметры для формфакторов переходов $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$, необходимые для использования формулы (9). Таблица взята из работы [2].

Параметр	F_V	F_{TV}	F_A	F_{TA}
β_i (ГэВ $^{-1}$)	0.28	0.30	0.26	0.33
Δ_i (ГэВ)	0.04	0.04	0.30	0.30

где $i = \{A, V, TA, TV\}$, ω_B - задается формулой (7). Параметры β_i и Δ_i одинаковы для формфакторов \bar{B}_d^0 - и \bar{B}_s^0 -мезонов. Их численные значения собраны в Таблице 1. Лептонные константы распадов равны $f_{B_d} = 0.20$ ГэВ и $f_{B_s} = 0.24$ ГэВ.

В [3] показано, что для учета процессов излучения виртуального фотона валентными кварками (соответствующие диаграммы представлены на рис.4) достаточно модифицировать формфакторы $F_{TV(TA)}(q^2, 0)$, добавив к ним формфакторы $F_{TV(TA)}(0, q^2)$, вычисленные в рамках модифицированной модели доминантности векторных мезонов [15, 16]:

$$\begin{aligned}
 F_{TV}(0, q^2) &= F_{TV}(0, 0) - \sum_i \frac{2g_+^i(0)}{f_i} \frac{q^2}{q^2 - M_i^2 + iM_i\Gamma_i} \\
 F_{TA}(0, q^2) &= F_{TA}(0, 0) - \sum_i \frac{2g_+^i(0)}{f_i} \frac{q^2}{q^2 - M_i^2 + iM_i\Gamma_i}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

где M_i и Γ_i – массы и полные ширины распадов векторных мезонов V_i . Константы f_i вычис-

Таблица 2: Численные значения констант распада векторных мезонов f_i и формфакторов $g_+^i(0)$. В таблице учтены дополнительные изотопические коэффициенты, с которыми состояния $d\bar{d}$ и $s\bar{s}$ присутствуют в волновых функциях ρ^0 , ω и ϕ – мезонов. Таблица взята из работы [3].

Переход	$B_d^0 \rightarrow \rho^0$	$B_d^0 \rightarrow \omega$	$B_s^0 \rightarrow \phi$
f_i	5,04	17,1	-13,2
$g_+^i(0)$	$0,27/\sqrt{2}$	$-0,27/\sqrt{2}$	-0,38

ляются по известным ширинам распадов $V_i \rightarrow e^+e^- (\mu^+\mu^-)$ согласно формуле

$$\Gamma(V_i \rightarrow e^+e^- (\mu^+\mu^-)) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{em}^2}{f_i^2} M_i, \quad (11)$$

Формфакторы $g_+^i(k^2)$ определены следующим образом [18]:

$$\langle V_i(q, M_i, \varepsilon) | \bar{d}\sigma_{\mu\nu}b | \bar{B}_d^0(p, M_1) \rangle = i\varepsilon^{*\alpha} \epsilon_{\mu\nu\beta\gamma} [g_+^i(k^2)g_{\alpha\beta}(p+q)^\gamma + g_-^i(k^2)g_{\alpha\beta}k^\gamma + g_0^i(k^2)p_\alpha p^\beta q^\gamma].$$

Численные значения безразмерных величин f_i и $g_+^i(0)$ с учетом вкладов $d\bar{d}$ или $s\bar{s}$ -пар в волновые функции ρ^0 , ω и ϕ -резонансов приведены в Таблице 2. Отметим, что резонансный вклад в формулах (10) аналогичен вкладу векторных резонансов в вильсоновские коэффициенты $C_{9V}^{\text{eff}(q)}(\mu, s)$ и $C_{9V}^{\text{eff}(\bar{q})}(\mu, s)$.

Если принять во внимание ненулевую массу легкого кварка m_q и вклад эффектов “слабой аннигиляции” [3], то тензорный и псевдотензорный формфакторы распадов $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_{TV}^{b\rightarrow q}(q^2) &= \left(1 + \frac{m_q}{m_b}\right) (F_{TV}(q^2, 0) + F_{TV}(0, q^2)) - \frac{16}{3} (\lambda_u^{(q)} + \lambda_c^{(q)}) \frac{a_1}{C_{7\gamma}} \frac{f_{B_q}}{m_b}, \\ F_{TA}^{b\rightarrow q}(q^2) &= \left(1 - \frac{m_q}{m_b}\right) (F_{TA}(q^2, 0) + F_{TA}(0, q^2)), \end{aligned} \quad (12)$$

где $a_1 = C_1 + C_2/3$ и f_{B_q} – действительная положительная лептонная константа распада \bar{B}_q^0 -мезона, которая определяется значением матричного элемента

$$\langle 0 | \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5b | \bar{B}_q^0(p, M_1) \rangle = if_{B_q}p^\mu.$$

1.3.2 Формфакторы перехода $B_q^0 \rightarrow \gamma$

Для получения формфакторов перехода $B_q^0 \rightarrow \gamma$ из формфакторов процесса $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$ необходимо воспользоваться оператором зарядового сопряжения \hat{C} , который следующим образом действует на вектора состояний B -мезона, фотона и вакуума:

$$\hat{C} |\bar{B}(M_1, p)\rangle = e^{-i\varphi_B} |B(M_1, p)\rangle; \quad \hat{C} |\gamma(k, \epsilon)\rangle = -|\gamma(k, \epsilon)\rangle; \quad \hat{C} |0\rangle = |0\rangle,$$

где φ_B – произвольная фаза. Хорошо известно [17], что при таком определении зарядового сопряжения отношение элементов матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава $q/p = V_{tb}^* V_{tq} / V_{tb} V_{tq}^*$ также претерпевает модификацию:

$$\frac{q}{p} \rightarrow e^{i\varphi_B} \frac{q}{p}.$$

Оператор зарядового сопряжения \hat{C} следующим образом действует на кварковые токи⁴:

$$\begin{aligned} \hat{C} \bar{q} b \hat{C}^{-1} &= \bar{b} q; & \hat{C} \bar{q} \gamma^5 b \hat{C}^{-1} &= \bar{b} \gamma^5 q; & \hat{C} \bar{q} \gamma^\mu b \hat{C}^{-1} &= -\bar{b} \gamma^\mu q; \\ \hat{C} \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 b \hat{C}^{-1} &= \bar{b} \gamma^\mu \gamma^5 q; & \hat{C} \bar{q} \sigma^{\mu\nu} b \hat{C}^{-1} &= -\bar{b} \sigma^{\mu\nu} q; \\ \hat{C} \bar{q} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 b \hat{C}^{-1} &= -\bar{b} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 q. \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание определения формфакторов через адронные матричные элементы и правила (13), можно получить следующие соответствия между формфакторами переходов $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$ и $B_q^0 \rightarrow \gamma$ (в каждом выражении первым всегда стоит формфактор перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$, даже если это явно не обозначено в индексах):

$$\begin{aligned} f_{B_q} &\rightarrow f_{B_q}; & F_V(q^2) &\rightarrow F_V(q^2); & F_A(q^2) &\rightarrow -F_A(q^2); \\ F_{TV}^{b \rightarrow q}(q^2) &\rightarrow -F_{TV}^{\bar{b} \rightarrow \bar{q}}(q^2); & F_{TA}^{b \rightarrow q}(q^2) &\rightarrow F_{TA}^{\bar{b} \rightarrow \bar{q}}(q^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} F_{TV}^{\bar{b} \rightarrow \bar{q}}(q^2) &= \left(1 + \frac{m_q}{m_b}\right) (F_{TV}(q^2, 0) + F_{TV}(0, q^2)) + \\ &+ \frac{16}{3} (\lambda_u^{(q)*} + \lambda_c^{(q)*}) \frac{a_1}{C_{7\gamma}} \frac{f_{B_q}}{m_b}, \\ F_{TA}^{\bar{b} \rightarrow \bar{q}}(q^2) &= \left(1 - \frac{m_q}{m_b}\right) (F_{TA}(q^2, 0) + F_{TA}(0, q^2)). \end{aligned} \quad (15)$$

⁴В кварковые токи входят операторы кварковых полей, поэтому необходимо учесть их антикоммутируемость.

Кроме того, во всех амплитудах распадов $B_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ необходимо учесть дополнительный фазовый множитель $e^{i\varphi_B}$. При написании Монте-Карло генератора было принято во внимание, что в пакете EvtGen фаза $\varphi_B = 0$.

1.4 Матричный элемент для редких радиационных лептонных распадов B -мезонов

1.4.1 Матричный элемент без учета тормозного излучения лептонов

В самом общем виде амплитуда распада $\bar{B}_q^0(p, M_1) \rightarrow \gamma(k, \epsilon) \ell^+(k_1) \ell^-(k_2)$ без учета тормозного излучения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(k, \epsilon), \ell^+(k_1), \ell^-(k_2) | H_{\text{eff}}^{\text{SM}b \rightarrow q \ell^+ \ell^-} | \bar{B}_q(p, M_1) \rangle = & \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_1 \frac{\alpha_{em}}{2\pi} e V_{tb} V_{tq}^* \quad (16) \\ & \left[a(\mu, \hat{s}) \epsilon_{\mu\epsilon^* \hat{p} \hat{k}} (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \ell(-k_1)) - i b(\mu, \hat{s}) \epsilon_\mu^* (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \ell(-k_1)) + \right. \\ & i c(\mu, \hat{s}) \hat{P}_\mu (\epsilon^* \hat{p}) (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \ell(-k_1)) + i d(\mu, \hat{s}) \hat{q}_\mu (\epsilon^* \hat{p}) (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \ell(-k_1)) + \\ & e(\mu, \hat{s}) \epsilon_{\mu\epsilon^* \hat{p} \hat{k}} (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \ell(-k_1)) - i f(\mu, \hat{s}) \epsilon_\mu^* (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \ell(-k_1)) + \\ & \left. i g(\mu, \hat{s}) \hat{P}_\mu (\epsilon^* \hat{p}) (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \ell(-k_1)) + i h(\mu, \hat{s}) \hat{q}_\mu (\epsilon^* \hat{p}) (\bar{\ell}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \ell(-k_1)) \right]. \end{aligned}$$

Чтобы записать (16) в виде, удобном для программной реализации⁵, амплитуду необходимо выразить через безразмерные 4-импульсы. То есть, например, в приведенной выше формуле положить $\hat{k}^\mu = k^\mu / M_1$.⁶ Остальные обозначения аналогичны. В принятых обозначениях безразмерные мандельштамовские переменные записываются следующим образом:

$$\hat{s} = (\hat{p} - \hat{k})^2, \quad \hat{t} = (\hat{p} - \hat{k}_1)^2, \quad \hat{u} = (\hat{p} - \hat{k}_2)^2.$$

⁵Именно здесь уместно напомнить об одной очень важной особенности реализации матричного элемента (16) и аналогичных ему в пакетах EvtGen и EvtGenExtras. Незнание этой особенности привело к зеркальным результатам для угловых распределений и зарядовой лептонной асимметрии в препринте [8]. Ошибка была исправлена в ноте [10]. Особенность заключается в следующем. Выражение (16) содержит свертку полностью антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ с *нижними индексами*. В то время как класс EvtTensor4C пакета EvtGen обладает методами работы только с полностью антисимметричным тензором $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, имеющим все *верхние индексы*. Поэтому при программировании формул (17), (19) и (21) необходимо изменить знак при полностью антисимметричном тензоре на противоположный.

⁶Данное обозначение не следует путать с общепринятым в квантовой теории поля обозначением $\hat{a} = \gamma^\mu a_\mu$. В настоящей работе квантовополевое обозначение не используется ни в одной формуле.

В силу уравнений движения $q_\mu (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\ell(-k_1)) = 0$, поэтому функция $d(\mu, \hat{s})$ не вносит вклад в амплитуду (16) в любой системе отсчета. В пакетах EvtGen и EvtGenExtras матричный элемент (16) записывается в системе покоя \bar{B}_q^0 -мезона. Тогда, применяя условие (6), из формулы (16) можно исключить функции $c(\mu, \hat{s})$, $g(\mu, \hat{s})$ и $h(\mu, \hat{s})$, поскольку все они домножаются на скалярное произведение $(\epsilon^*\hat{p})$. Таким образом, в системе покоя \bar{B}_q^0 -мезона матричный элемент (16) записывается в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(k, \epsilon), \ell^+(k_1), \ell^-(k_2) \left| H_{\text{eff}}^{\text{SM}b \rightarrow q\ell^+\ell^-} \right| \bar{B}_q(p, M_1) \rangle &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_1 \frac{\alpha_{em}}{2\pi} e V_{tb} V_{tq}^* \quad (17) \\ &\left[a(\mu, \hat{s}) \epsilon_{\mu\epsilon^*\hat{p}\hat{k}} (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\ell(-k_1)) - i b(\mu, \hat{s}) \epsilon_\mu^* (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\ell(-k_1)) + \right. \\ &\left. e(\mu, \hat{s}) \epsilon_{\mu\epsilon^*\hat{p}\hat{k}} (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5\ell(-k_1)) - i f(\mu, \hat{s}) \epsilon_\mu^* (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5\ell(-k_1)) \right]. \end{aligned}$$

Для стандартной модели функции $a(\mu, \hat{s}) - f(\mu, \hat{s})$ задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} a(\mu, \hat{s}) &= 2 C_{7\gamma}(\mu) \frac{\hat{m}_b}{\hat{s}} F_{TV}^{b \rightarrow q} + C_{9V}^{\text{eff}(q)}(\mu, s) F_V, \quad (18) \\ b(\mu, \hat{s}) &= \frac{1 - \hat{s}}{2} \left(2 C_{7\gamma}(\mu) \frac{\hat{m}_b}{\hat{s}} F_{TA}^{b \rightarrow q} + C_{9V}^{\text{eff}(q)}(\mu, s) F_A \right), \\ e(\mu, \hat{s}) &= C_{10A}(\mu) F_V, \quad f(\mu, \hat{s}) = \frac{1 - \hat{s}}{2} C_{10A}(\mu) F_A. \end{aligned}$$

Эти равенства получаются при сравнении формулы (16) настоящей работы с формулой (2.4) первой из работ [3].

Амплитуду распада $B_q^0(p, M_1) \rightarrow \gamma(k, \epsilon) \ell^+(k_1) \ell^-(k_2)$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(k, \epsilon), \ell^+(k_1), \ell^-(k_2) \left| H_{\text{eff}}^{\text{SM}b \rightarrow q\ell^+\ell^-} \right| B_q(p, M_1) \rangle &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_1 \frac{\alpha_{em}}{2\pi} e V_{tb}^* V_{tq} \quad (19) \\ &\left[\tilde{a}(\mu, \hat{s}) \epsilon_{\mu\epsilon^*\hat{p}\hat{k}} (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\ell(-k_1)) + i \tilde{b}(\mu, \hat{s}) \epsilon_\mu^* (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\ell(-k_1)) + \right. \\ &\left. e(\mu, \hat{s}) \epsilon_{\mu\epsilon^*\hat{p}\hat{k}} (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5\ell(-k_1)) + i f(\mu, \hat{s}) \epsilon_\mu^* (\bar{\ell}(k_2)\gamma^\mu\gamma^5\ell(-k_1)) \right]. \end{aligned}$$

Из формулы (19) исключены слагаемые, которые не дают вклада в системе покоя B_q -мезона. Используя явный вид эффективного гамильтониана (2) и правила преобразования формфакторов при зарядовом сопряжении (14), можно установить, что при переходе от распадов \bar{B}_q^0 к распадам B_q^0 -мезонов функция $e(\mu, \hat{s})$ не меняет знак, а функция $f(\mu, \hat{s})$ меняет знак (что явно отражено в определении амплитуды (19)). Функции $a(\mu, \hat{s})$ и $b(\mu, \hat{s})$ из (17) должны быть заменены на новые функции:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mu, \hat{s}) &= 2 C_{7\gamma}(\mu) \frac{\hat{m}_b}{\hat{s}} F_{TV}^{\bar{b} \rightarrow \bar{q}} + C_{9V}^{\text{eff}(\bar{q})}(\mu, s) F_V, \quad (20) \\ \tilde{b}(\mu, \hat{s}) &= \frac{1 - \hat{s}}{2} \left(2 C_{7\gamma}(\mu) \frac{\hat{m}_b}{\hat{s}} F_{TA}^{\bar{b} \rightarrow \bar{q}} + C_{9V}^{\text{eff}(\bar{q})}(\mu, s) F_A \right). \end{aligned}$$

1.4.2 Вклад тормозного излучения лептонов в амплитуду

Вклад тормозного излучения лептонов в амплитуду распада $\bar{B}_q^0(p, M_1) \rightarrow \gamma(k, \epsilon)\ell^+(k_1)\ell^-(k_2)$ описывается выражением [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_1 \frac{\alpha_{em}}{2\pi} e V_{tq}^* V_{tb} \frac{f_{B_q}}{M_1} \hat{m} C_{10A} \times \\ & \times \bar{\ell}(k_2) \left[i \left(\frac{1}{(\hat{k}, \hat{k}_2)} - \frac{1}{(\hat{k}, \hat{k}_1)} \right) (\epsilon^* \hat{p}) - \frac{i}{2} \left(\frac{1}{(\hat{k}, \hat{k}_2)} + \frac{1}{(\hat{k}, \hat{k}_1)} \right) \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{*\alpha} \hat{p}^\beta \sigma^{\mu\nu} \right] \ell(-k_1). \end{aligned} \quad (21)$$

В системе покоя нейтрального \bar{B}_q^0 -мезона первое слагаемое обращается в нуль. Поскольку амплитуда тормозного излучения C -инвариантна, то она имеет один и тот же вид как для распада $\bar{B}_q^0(p, M_1) \rightarrow \gamma(k, \epsilon)\ell^+(k_1)\ell^-(k_2)$, так и для распада $B_q^0(p, M_1) \rightarrow \gamma(k, \epsilon)\ell^+(k_1)\ell^-(k_2)$ (естественно, с учетом замены $V_{tq}^* V_{tb}$ на $V_{tq} V_{tb}^*$). Это можно показать прямыми вычислениями.

1.4.3 Элементы матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава

При написании Монте-Карло генератора используются вычисленные с точностью $O(\lambda^4)$ ККМ-матричные элементы в параметризации Вольфенштейна:

$$\begin{aligned} V_{ud} &= 1 - 0.5 \lambda^2 - 0.125 \lambda^4, & V_{us} &= \lambda, & V_{ub} &= A \lambda^3 (\rho - i \eta), \\ V_{td} &= A \lambda^3 (1 - (1 - 0.5 \lambda^2) (\rho + i \eta)), & V_{ts} &= -A \lambda^2 (1 - 0.5 \lambda^2 + \lambda^2 (\rho + i \eta)), \\ V_{tb} &= 1 - 0.5 (A \lambda^2)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

2 Реализация распадов $\bar{B}_q^0(B_q^0) \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma$ в программном пакете EvtGenExtras

До недавнего времени пакеты EvtGen и EvtGenExtras не располагали ни одной моделью для генерации редких радиационных лептонных распадов B_q -мезонов. Группой НИИЯФ МГУ создана такая модель, которая носит название BSTOGLLMNT. Модель включена в пакет EvtGenExtras официального ПО коллаборации ЛНСб начиная с версии v2r4. Для официальной генерации рекомендуется использовать версию v2r5. Подробному описанию реализации модели и руководству по ее практическому использованию посвящен данный раздел.

2.1 Общее описание модели BSTOGLLMNT

Монте-Карло генератор или модель BSTOGLLMNT (далее оба термина употребляются как синонимы) включает в себя:

- все возможные в рамках СМ трехчастичные редкие радиационные лептонные распады B_d - и B_s -мезонов:
 $B_d^0 \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$,
 $B_s^0 \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$,
где $\ell^\pm = \{e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm\}$;
- формфакторы адронных переходов, вычисленные в рамках дисперсионной формулировки кварковой модели с использованием параметризаций, взятых из работ [2, 18], и при помощи модели доминантности векторных мезонов [3];
- зависимость вильсоновских коэффициентов C_i от масштабного параметра μ и вклад векторных резонансов ρ , ω , ϕ , J/ψ , ψ' и т.д. в рамках стандартной модели;
- различные CP -нарушающие эффекты согласно работе [4].
- возможность изменения величины матричных элементов ККМ-матрицы в параметризации Вольфенштейна на уровне входных параметров.

2.1.1 Перечень файлов с кодом модели

Код модели BSTOGLLMNT содержится в следующих файлах пакета EvtGenExtras:

```

.../Gen/EvtGenExtras/EvtGenModels/Evtbs211GammaAmp.hh
.../Gen/EvtGenExtras/EvtGenModels/Evtbs211GammaFFMNT.hh
.../Gen/EvtGenExtras/EvtGenModels/Evtbs211GammaMNT.hh
.../Gen/EvtGenExtras/EvtGenModels/Evtbs211GammaFF.hh
.../Gen/EvtGenExtras/src/Evtbs211GammaAmp.cpp
.../Gen/EvtGenExtras/src/Evtbs211GammaMNT.cpp
.../Gen/EvtGenExtras/src/Evtbs211GammaFFMNT.cpp

```

Файл `Evtbs211GammaMNT.cpp` содержит код для методов класса `Evtbs211GammaMNT`. Файл `Evtbs211GammaFFMNT.cpp` включает в себя методы класса `Evtbs211GammaFFMNT`, который является производным от базового класса `Evtbs211GammaFF`. Описание методов последнего базового класса можно найти в файле `Evtbs211GammaFF.hh`. Файл `Evtbs211GammaAmp.cpp` содержит методы класса `Evtbs211GammaAmp`, являющегося производным классом двух базовых классов пакета `EvtGen`: класса `EvtDecayBase` и класса `EvtDecayAmp`. Для вычисления вильсоновских коэффициентов модель `BSTOGLLMNT` использует файлы, относящиеся к модели `BTOSLLMS`:

```

.../Gen/EvtGenExtras/EvtGenModels/EvtbTos11WilsCoeffNLO.hh
.../Gen/EvtGenExtras/src/EvtbTos11WilsCoeffNLO.cpp

```

Необходимые для проверки работы модели `dec`-файлы носят названия

```

.../Gen/EvtGenExtras/testopts/Bd_gammamumuMNT.dec
.../Gen/EvtGenExtras/testopts/Bs_gammamumuMNT.dec

```

Для регистрации на установке ЛHCb наиболее интересными являются распадные моды с e^+e^- или $\mu^+\mu^-$ -парой в конечном состоянии. Начиная с версии пакета `DecFiles v21r5` `dec`-файлы из директории `testopts`, описывающие данные каналы распадов, включены в этот пакет. Таким образом, для официальной генерации редких радиационных лептонных распадов B -мезонов в рамках коллаборации ЛHCb необходимо использовать следующие `dec`-файлы из пакета `DecFiles` версии `v21r5` или выше:

```

.../Gen/DecFiles/dkfiles/Bd_gammaee=MNT,DecProdCut.dec
.../Gen/DecFiles/dkfiles/Bd_gammamumu=MNT,DecProdCut.dec
.../Gen/DecFiles/dkfiles/Bs_gammaee=MNT,DecProdCut.dec
.../Gen/DecFiles/dkfiles/Bs_gammamumu=MNT,DecProdCut.dec

```

Файлы с описанием распадов $B_q \rightarrow \gamma \tau^+ \tau^-$ в официальный релиз пакета DecFiles в настоящее время не входят.

2.1.2 Описание входных параметров

В модели BSTOGLLMNT входных параметров на один больше, чем входных параметров в модели BTOSLLMS. Дополнительный параметр задает минимальную энергию фотона E_{gamma} в системе покоя B_q -мезона. Обрезание по энергии фотона необходимо для вычисления вклада тормозного излучения. Таким образом, для модели BSTOGLLMNT в dec-файле необходимо задать следующие девять входных параметров:

- `mu` – масштабный параметр μ , равный по порядку величины массе b -кварка (по умолчанию принимается равным 5 ГэВ).
- `Nf` – число “эффективных” кварковых ароматов, используемых для вычисления значений бегущей константы связи сильного взаимодействия $\alpha_s(\mu)$. Для распадов B -мезонов это значение по умолчанию равно 5.
- `res_swch` – параметр определяет наличие или отсутствие вклада векторных резонансов с кварковым составом $u\bar{u}$ и $c\bar{c}$. Вклад резонансов в тензорный и псевдотензорный формфакторы учитывается при любом значении параметра `res_swch`.

Если `res_swch` = 0, то вклад резонансов не учитывается.

Если `res_swch` = 1, то учитывается вклад всех резонансов, кроме J/ψ и ψ' . При этом амплитуда в области J/ψ - и ψ' -резонансов ($9.199 < s < 15.333$) зануляется. Это значение параметра `res_swch` задано по умолчанию⁷.

- `ias` – параметр, определяющий выбор значения $\alpha_s(M_Z)$.

Если `ias` = 0, то выбирается значение $\alpha_s(M_Z)$, соответствующее нижней границе экспериментального интервала.

Если `ias` = 1, то выбирается среднее значение $\alpha_s(M_Z)$. Это значение параметра `ias` по умолчанию.

⁷Отметим, что в модели BTOSLLMS, наоборот, по умолчанию выставлено значение `res_swch` = 0, и амплитуда в резонансной области не зануляется.

Если $ias = 2$, то выбирается значение $\alpha_s(M_Z)$, соответствующее верхней границе экспериментального интервала.

- E_{gamma} – минимальная энергия фотона (ГэВ) в системе покоя B_q -мезона. По умолчанию этот параметр равен 20 МэВ, что по порядку величины соответствует энергетическому разрешению калориметра установки ЛНСб.
- Четыре параметра A , λ , $\bar{\rho}$ и $\bar{\eta}$, соответствующие Вольфенштейновской параметризации СКМ-матрицы (см. формулы (22)). Параметры $\bar{\rho}$ и $\bar{\eta}$ связаны с параметрами ρ и η следующими формулами: $\bar{\rho} = \rho \sqrt{1 - \lambda^2}$ и $\bar{\eta} = \eta \sqrt{1 - \lambda^2}$. По умолчанию $A = 0,88$, $\lambda = 0,227$, $\bar{\rho} = 0,22$ и $\bar{\eta} = 0,34$.

2.1.3 Пример дес-файла

Приведем пример дес-файла, который применяется коллаборацией ЛНСб для генерации распада $\bar{B}_s^0(B_s^0) \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$. Файл написан в соответствии с правилами, изложенными в [12].

```
#
# This is the decay file for the decay BS0 -> GAMMA MU+ MU-
#
# Author: Alexandre Popov, Nikolai Nikitin
# Date: 2010-07-11
#
# EventType: 13112200
#
# Descriptor: [B_s0 -> gamma mu+ mu-]cc
#
# NickName: Bs_gammamu=MNT,DecProdCut
#
# Cuts: DaughtersInLHCb
#
# Input parameters: mu - the scale parameter (in GeV's);
# Nf - number of "effective" flavors (for b-quark Nf=5);
# res_swch - resonant switching parametr:
# = 0 the resonant contribution switched OFF,
# = 1 the resonant contribution switched ON, but
# without the contribution of J/psi and psi'-resonances!;
# ias - switching parametr for \alpha_s(M_Z) value:
# = 0 PDG isigma minimal alpha_s(M_Z),
# = 1 PDG average value alpha_s(M_Z),
# = 2 PDG isigma maximal alpha_s(M_Z).
# Egamma - photon energy cut, GeV;
# Wolfenstein parameterization for CKM matrix: A, lambda, barrho, bareta
```

```

#
# Tested: Yes
# By: Nikolai Nikitin (Moscow State Univ.)
# Date: 14 July 2010
#
Define mu 5.0
Define Nf 5
Define res_swch 1
Define ias 1
Define Egamma 0.02
Define A 0.88
Define lambda 0.227
Define barrho 0.22
Define bareta 0.34
#
Decay B_s0sig
  1.000 gamma mu+ mu- BStoGLLMNT mu Nf res_swch ias Egamma A lambda barrho bareta;
Enddecay
CDecay anti-B_s0sig
#
End

```

Все строчки в файле `Bs_gammamumu=MNT,DecProdCut.dec` интуитивно понятны. При помощи команды `Define` можно менять значения входных параметров (в представленном выше примере для входных параметров выставлены их значения по умолчанию). Уникальный номер 13112200 задает тип распада для Монте-Карловской генерации согласно правилам, описанным в работе [19] и докладе [12]. В таблице 3 перечислены распадные моды, уникальные номера и `dec`-файлы для всех доступных в настоящее время каналов распадов.

Таблица 3: Информация о `dec`-файлах пакета `DecFiles v21r5` для редких радиационных лептонных распадов B_q -мезонов.

Канал распада	EventType	Название <code>dec</code> -файла
$B_d^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$	11112200	<code>Bd_gammamumu=MNT,DecProdCut.dec</code>
$B_d^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$	11122200	<code>Bd_gammaeee=MNT,DecProdCut.dec</code>
$B_s^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$	13112200	<code>Bs_gammamumu=MNT,DecProdCut.dec</code>
$B_s^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$	13122200	<code>Bs_gammaeee=MNT,DecProdCut.dec</code>

2.1.4 Структура классов и описание некоторых методов

Модель `BSTOGLLMNT` включает в себя следующие основные классы и методы:

- Класс `Evtbs211GammaMNT` служит интерфейсом между моделью `BSTOGLLMNT` и всеми стандартными классами и методами пакета `EvtGen`. Этот класс является производным от классов `EvtDecayBase` и `EvtDecayAmp`. Основные методы данного класса:
 - `getName()` – метод возвращает уникальное название модели (в рассматриваемом случае – это `BSTOGLLMNT`).
 - `init()` – метод проводит проверку правильности задания начальных параметров модели в `dec`-файле и инициализирует эти параметры.
 - `initProbMax()` – метод возвращает значения максимума распределения вероятности (для трехчастичного распада – это максимум распределения $d^2\Gamma/d\hat{s} d\cos\theta$).
 - `decay(EvtParticle *p)` – для выбранной модели метод распадает B -мезон по заданному каналу в согласии с установленными в `dec`-файле значениями входных параметров.
- Класс `Evtbs211GammaAmp` задает амплитуду и вычисляет максимум вероятности для редких радиационных лептонных распадов B -мезонов. В амплитуде учтено обрезание по энергии фотона в системе покоя B -мезона. Кроме того, для случая `res_swch = 1` исключена область J/ψ - и ψ' -резонансов ($9.199 < s < 15.333$), что соответствует реальной экспериментальной процедуре поиска редких радиационных лептонных распадов на ускорителях. Основные методы класса:
 - `CalcAmp(...)` – метод задает амплитуду редкого радиационного лептонного распада с использованием функций из дружественных (`friends`) классов `Evtbs211GammaFF` (вычисление формфакторов) и `EvtbTos11WilsCoeffNLO` (вычисление вильсоновских коэффициентов); амплитуда записывается в системе покоя $\bar{B}_q^0(B_q^0)$ -мезона при помощи формул (17), (19) и (21). Вклад ККМ-матричных элементов вычисляется по формулам (22) с точностью $O(\lambda^4)$.
 - `CalcMaxProb(...)` – метод вычисляет максимальное значение дважды дифференциального распределения $d^2\Gamma/d\hat{s} d\cos\theta$; в резонансном случае (`ias = 1`) максимум приходится на значение $\hat{s} = M_{J/\psi}^2/M_1^2$; в нерезонансном случае (`ias = 0`) максимум

может находиться при одном из следующих значений переменной \hat{s} : в фотонном полюсе при $\hat{s} = 4\hat{m}^2$, в полюсе от тормозного излучения при $\hat{s} = \hat{s}_{\max}$ или в одном из полюсов, отвечающих массам векторных резонансов ϕ (в случае распада B_s -мезона) и ρ^0 и ω (в случае распада B_d -мезона).

- Класс `Evtbs2llGammaFFMNT` вычисляет формфакторы перехода $\bar{B}_q(B_q) \rightarrow \gamma$ с учетом эффектов CP -нарушения. Формфакторы ищутся по формулам (8), (10), (12) и (15). Для численной параметризации формфакторов используется выражение (9). Основные методы класса:

- `getPhotonFF(int decay_id, ...)` – возвращает набор формфакторов перехода $\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma$, если `decay_id = 0`, и набор формфакторов для перехода $B_q^0 \rightarrow \gamma$, если параметр `decay_id = 1`.
- `getQuarkMass(int i)` – метод возвращает значение массы конституентного кварка (ГэВ) в дисперсионной формулировке кварковой модели [18]. Значения переменной `i` пробегает значения от 1 до 5, что соответствует последовательности кварков u , d , s , c и b .

- Класс `EvtbTosllWilsCoeffNLO` предназначен для вычисления вильсоновских коэффициентов СМ в NLO-приближении [14] с учетом эффектов CP -нарушения [4] и с учетом или без учета вклада векторных $u\bar{u}$ - и $c\bar{c}$ -резонансов. Данный класс относится к модели `BTOSLLMS`. Его первая реализация была описана в [8, 10]. Начиная с версии `EvtGenExtras v2r4` при вычислении вильсоновского коэффициента C_{9V}^{eff} учитываются эффекты CP -нарушения по формулам (3) и (4).

Иерархия и связи между различными классами модели `BSTOGLLMNT` показаны на рис.5.

2.2 Дифференциальные распределения

Хорошо известно, что фазовое пространство любого трехчастичного распада можно задать при помощи двух мандельштамовских инвариантов или величин, выражающихся через эти инварианты. В настоящем разделе будут рассмотрены дифференциальные распределения по безразмерной инвариантной массе лептонной пары $\hat{s} = s/M_1^2 = q^2/M_1^2$ и по переменной $\cos\theta$, где θ – угол между направлениями движения фотона и отрицательно заряженного

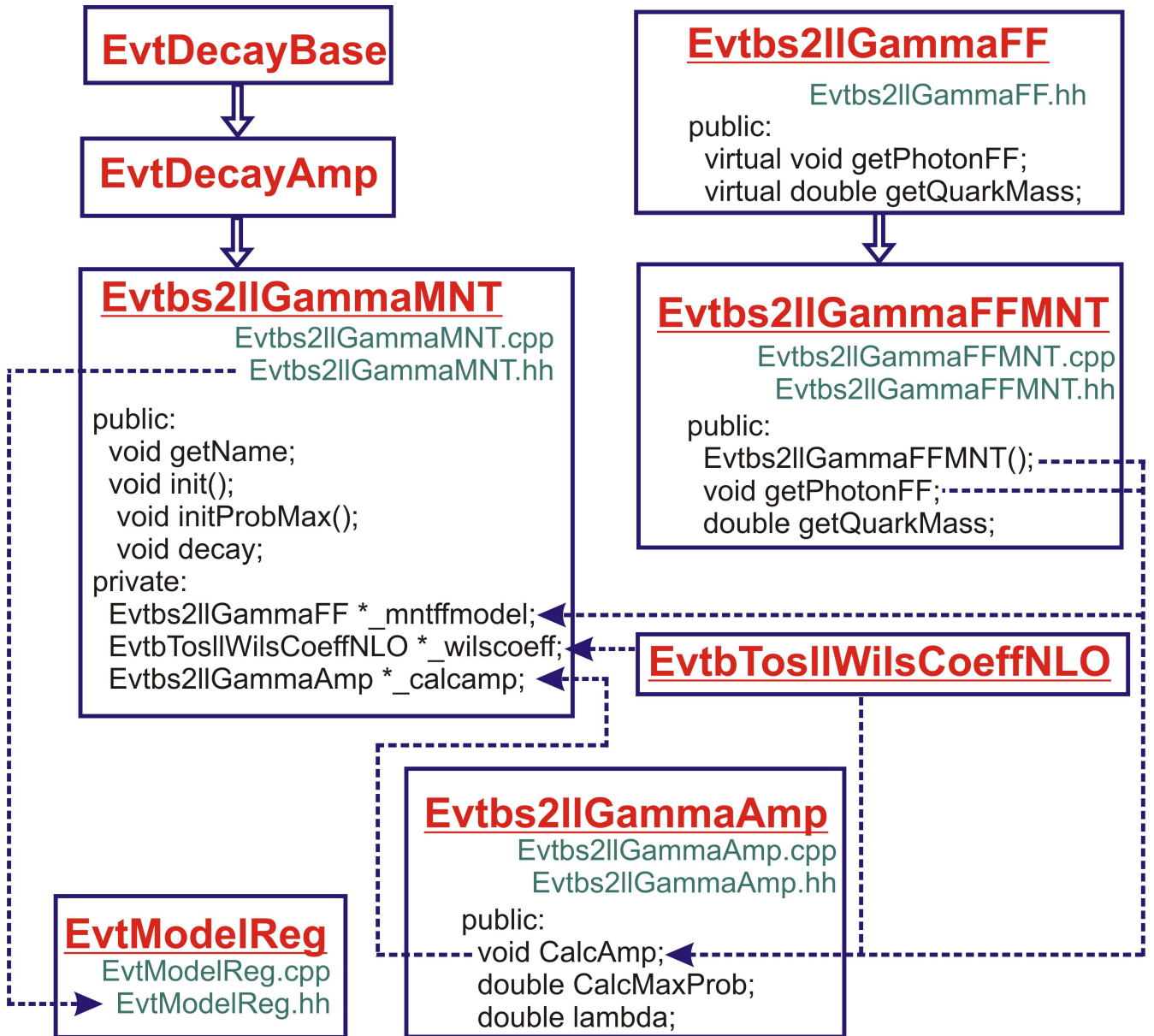


Рис. 5: Схема для иерархий и зависимостей классов в модели BSTOGLLMNT.

лептона в системе покоя лептонной пары. Последняя переменная может быть выражена через мандельштамовскую переменную $\hat{t} = (\hat{p} - \hat{k}_1)^2 = (\hat{k} + \hat{k}_2)^2$. Анализ дифференциальных распределений по \hat{s} и $\cos\theta$ дает исчерпывающую информацию о работе модели `BSTOGLLMNT`.

Стратегия проверки правильности работы Монте-Карло генератора для редких радиационных лептонных распадов абсолютно отличается от стратегии тестирования генератора для редких полулептонных распадов. В работах [8, 10] новая модель для редких полулептонных распадов `BTOSLLMS` сравнивалась с уже существующими в пакете `EvtGen` аналогичными моделями `BTOSLLALI` и `BTOSLLBALL`. Для модели `BSTOGLLMNT` такое сравнение провести невозможно, поскольку ни в пакете `EvtGen`, ни в пакете `EvtGenExtras` нет ни одного Монте-Карло генератора для редких радиационных лептонных распадов B -мезонов. Это связано с тем, что, во-первых, даже в СМ полная теория таких распадов была создана относительно недавно [2, 3, 4]. Во-вторых, для регистрации таких распадов требуется несколько миллиардов B -мезонов, которые можно получить только на ЛНС⁸. Поэтому потребность в написании модели для генерации редких радиационных лептонных распадов возникла совсем недавно в связи с началом работы ускорителя ЛНС и установки ЛНСб.

Единственной возможностью проверки правильности работы модели `BSTOGLLMNT` является сравнение монте-карловских распределений с аналогичными, полученными при помощи теоретических вычислений. Дополнительно можно применить качественный анализ полученных распределений исходя из общих физических соображений. Для тестирования удобно использовать распады с $\mu^+\mu^-$ -парой в конечном состоянии, как наиболее приближенные к требованиям реального эксперимента.

2.2.1 Распределения по инвариантной димюонной массе

Рассмотрим распределение по инвариантной димюонной массе для распадов $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$. Распределение показано на рис.6 в двойном логарифмическом масштабе. График слева взят из работы [3]. Сплошная кривая отвечает ситуации, когда учтен вклад всех резонансов. На графике отчетливо виден пик от ω -мезона при малых \hat{s} . При промежуточных значениях \hat{s} имеются острые пики от J/ψ - и ψ' -резонансов. Эти пики исключены в Монте-Карло генераторе. Фотонный полюс и пик ρ^0 -мезона в дважды логарифмическом масштабе “расплываются”.

⁸Напомним, что к настоящему времени на B -фабриках BaBar и Belle было получено 384 и 657 миллионов $B_d\bar{B}_d$ и B^+B^- -пар соответственно [20]. При этом установка BaBar завершила свою работу, а установка Belle перешла в пик $\Upsilon(5S)$ -мезона для резонансного рождения $B_s\bar{B}_s$ -пар.

На рис.6 справа показан результат работы модели BStoGllMnt для 30 тысяч сгенерированных распадов. Генерация производилась в оболочке Gauss v38r5. Вклад фотонного полюса, ρ^0 - и ω -мезонов попали в первый бин распределения. В области J/ψ - и ψ' -резонансов распределение равно нулю в полном согласии со структурой матричного элемента модели BStoGllMnt.

Аналогичное распределение по инвариантной димюонной массе для распада $B_s^0(\bar{B}_s^0) \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ показано на рис.7. При малых \hat{s} в амплитуде доминирует пик ϕ -мезона, который дает вклад во второй бин распределения модели BStoGllMnt. На пик ϕ -мезона приходится около 90% всех монте-карловских событий, общее число которых составляет 36700 распадов. Данная генерация проводилась с помощью Gauss v38r3.

Сравнение распределений на рис.6 и рис.7 показывает прекрасное согласие между теорией и Монте-Карло генератором в пределах статистических неопределенностей.

2.2.2 Угловые распределения

Рассмотрим распределения по переменной $\cos\theta$. На рис.8 показаны нормированные на единицу распределения для распадов $\bar{B}_d^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (слева) и $B_d^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (справа). Оба распределения совпадают с теоретическими ожиданиями. Их разность определяет форму и знак зарядовой лептонной асимметрии, которая будет обсуждаться в следующем подразделе. Каждое из двух распределений содержит примерно по 15000 событий.

На рис.9 показаны аналогичные распределения для распадов $\bar{B}_s^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (слева) и $B_s^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (справа), но без учета тормозного излучения мюонов. Оба распределения хорошо совпадают с теоретическими ожиданиями. В каждом из двух распределений содержится около 18000 событий.

Матричный элемент без учета тормозного излучения лептонов в конечном состоянии включен в официальное ПО коллаборации LHCb начиная с Gauss v38r6 (и EvtGenExtras v2r4). Вклад тормозного излучения учтен в Gauss v38r7 (и EvtGenExtras v2r5).

2.2.3 Зарядовая лептонная асимметрия и CP -нарушающие асимметрии

Зарядовая лептонная асимметрия $A_{FB}(\hat{s})$ является важнейшим дифференциальным распределением в трехчастичных редких распадах B -мезонов с лептонами в конечном состоянии. Асимметрия $A_{FB}(\hat{s})$ чрезвычайно чувствительна к расширениям СМ. Форма асимметрии дает важную информацию о поведении матричного элемента $d^2\Gamma/d\hat{s}d\cos\theta$. В литературе

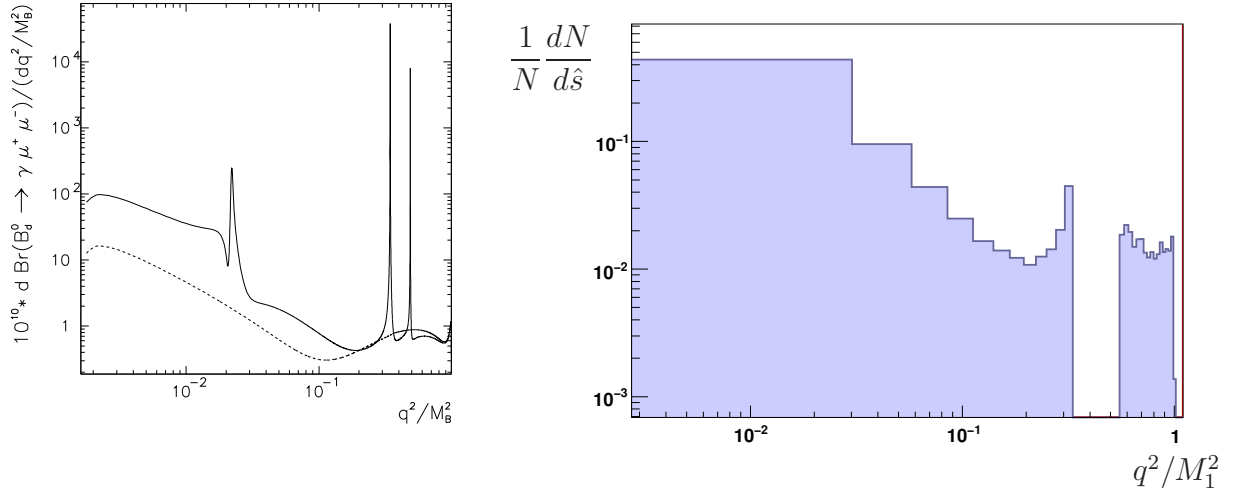


Рис. 6: Распределение по безразмерной инвариантной димюонной массе для распада $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$. Слева теоретическое распределение, взятое из работы [3]. Справа – аналогичное распределение, полученное в модели BSTOGLLMNT и нормированное на единицу. На рисунках $M_1 \equiv M_B$.

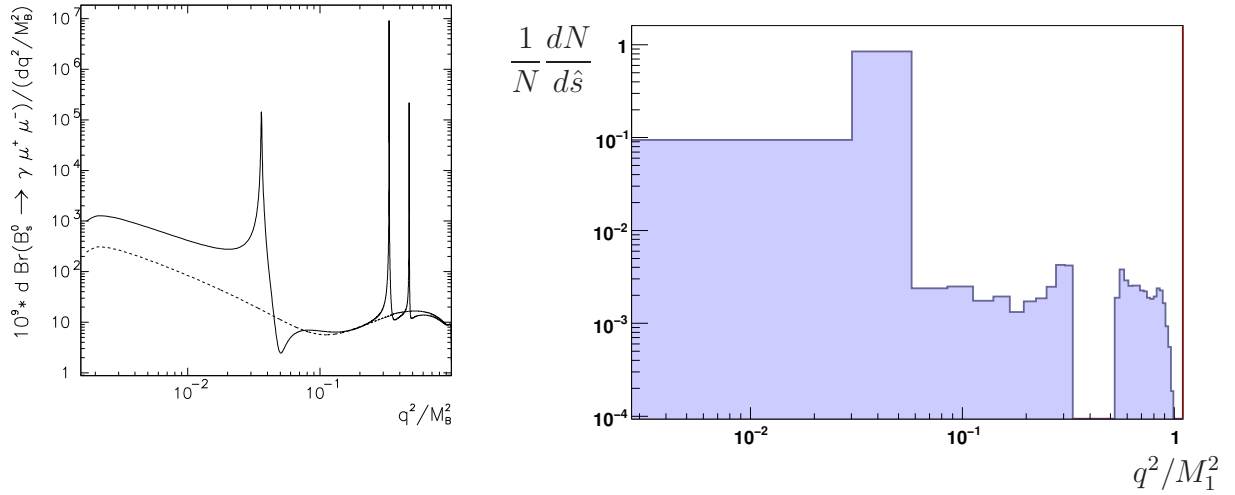


Рис. 7: Распределение по безразмерной инвариантной димюонной массе для распада $B_s^0(\bar{B}_s^0) \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$. Слева теоретическое распределение, взятое из работы [3]. Справа – аналогичное распределение, полученное в модели BSTOGLLMNT и нормированное на единицу. На рисунках $M_1 \equiv M_B$.

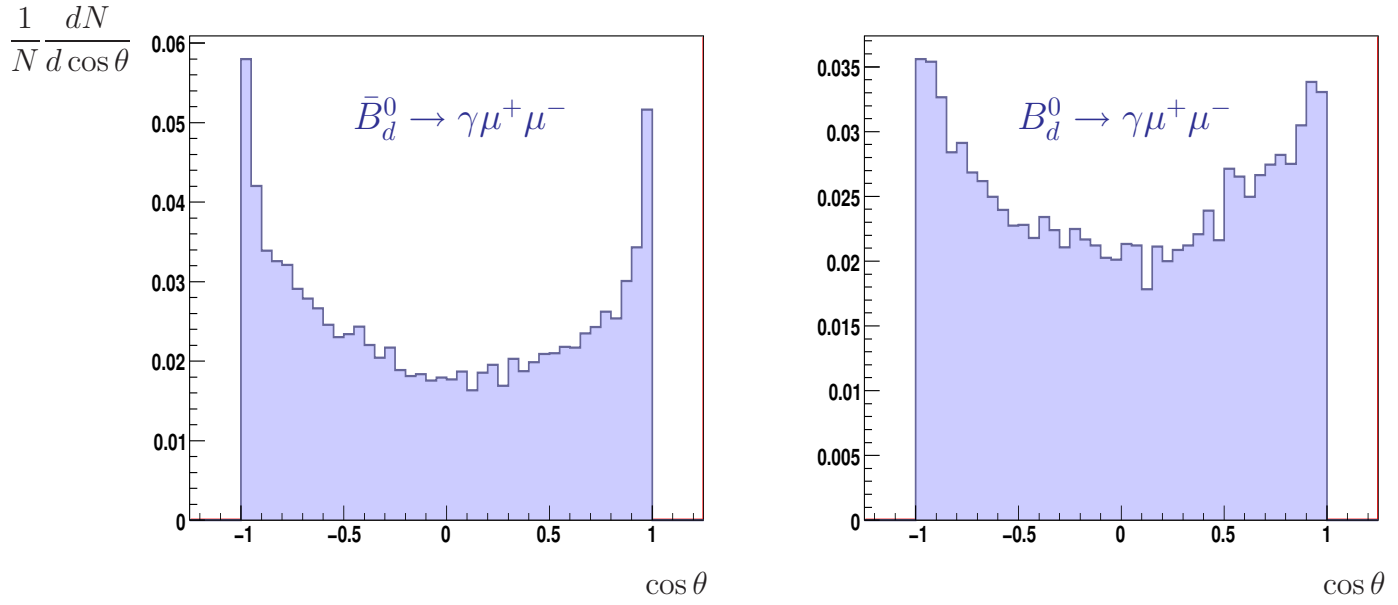


Рис. 8: Распределение по $\cos \theta$. Слева – для распада $\bar{B}_d^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$. Справа – для распада $B_d^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$. Распределения построены с **учетом** тормозного излучения мюонов.

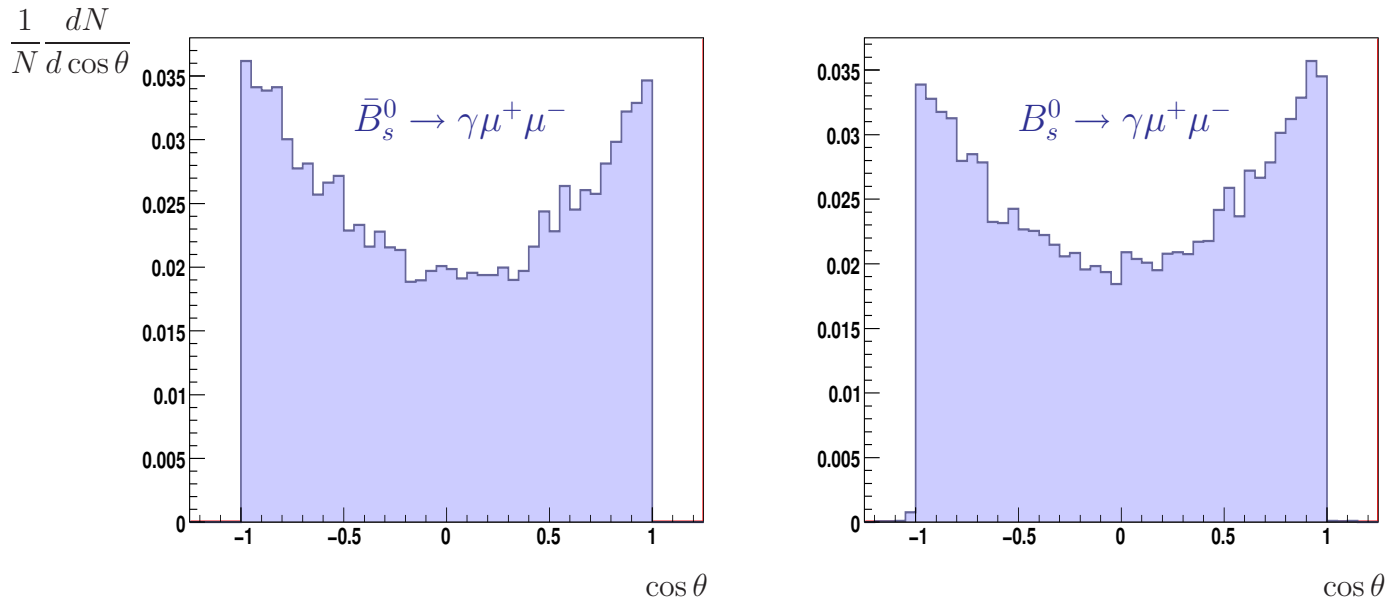


Рис. 9: Распределение по $\cos \theta$. Слева – для распада $\bar{B}_s^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$. Справа – для распада $B_s^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$. Распределения построены **без учета** тормозного излучения мюонов.

имеется несколько отличающихся знаком определений зарядовой лептонной асимметрии. В данной работе используется следующее определение:

$$A_{FB}(\hat{s}) = \frac{\int_0^1 d \cos \theta \frac{d^2 \Gamma(\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-)}{d \hat{s} d \cos \theta} - \int_{-1}^0 d \cos \theta \frac{d^2 \Gamma(\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-)}{d \hat{s} d \cos \theta}}{\frac{d \Gamma(\bar{B}_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-)}{d \hat{s}}}. \quad (23)$$

или полностью ему эквивалентное:

$$A_{FB}(\hat{s}) = \frac{\int_0^1 d \cos \theta_+ \frac{d^2 \Gamma(B_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-)}{d \hat{s} d \cos \theta_+} - \int_{-1}^0 d \cos \theta_+ \frac{d^2 \Gamma(B_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-)}{d \hat{s} d \cos \theta_+}}{\frac{d \Gamma(B_q^0 \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-)}{d \hat{s}}},$$

где θ_+ – угол между направлениями движения фотона и положительно заряженного лептона в системе покоя лептонной пары. Если пренебречь CP -нарушающими эффектами, то замена \bar{B}_q -мезона на B_q -мезон в формуле (23) ведет к изменению знака зарядовой лептонной асимметрии на противоположный.

На рис. 10 приведены теоретическая (слева) и сгенерированная при помощи тестируемой модели BSTOGLLMNT (справа) зарядовые лептонные асимметрии для распада $\bar{B}_d^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$. Нулевое значение асимметрии в модели BSTOGLLMNT при промежуточных значениях переменной \hat{s} отвечает исключению области J/ψ - и ψ' -резонансов в Монте-Карло генераторе. Сравнение обоих распределений на рис.10 демонстрирует отличное согласие между теорией и результатами Монте-Карло моделирования.

На рис.11 приведены зарядовые лептонные асимметрии для распадов $\bar{B}_d^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$ (слева) и $B_d^0 \rightarrow \gamma \mu^+ \mu^-$ (справа). Из рисунка видно, что обе асимметрии зеркальны одна относительно другой с точностью до флуктуаций числа частиц. На рис.12 представлен аналогичный результат для распадов \bar{B}_s^0 - и B_s^0 -мезонов.

Сравнение полученных в модели BSTOGLLMNT распределений по инвариантной дилептонной массе и по $\cos \theta$, а так же поведения зарядовой лептонной асимметрии с теоретическими предсказаниями позволяет сделать вывод, что в пренебрежении CP -нарушающими эффектами и с точностью до флуктуаций числа частиц в каждом бине модель BSTOGLLMNT работает правильно и не содержит грубых программных ошибок.

Для проверки корректности воспроизведения CP -нарушающих эффектов необходимо по-

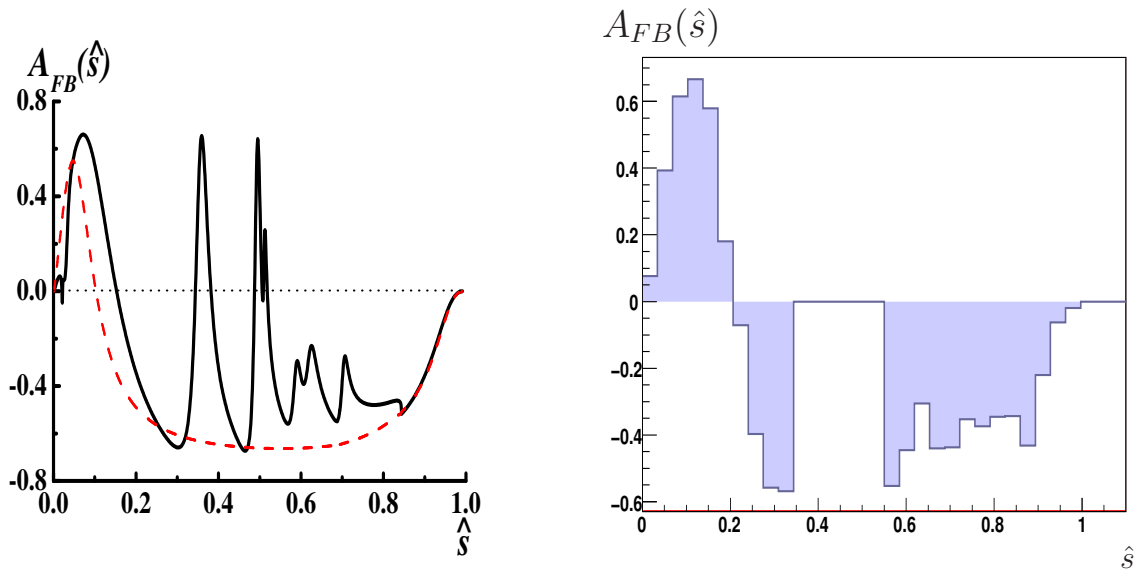


Рис. 10: Зарядовая лептонная асимметрия $A_{FB}(\hat{s})$ для распада $\bar{B}_d^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$. Слева – теоретическое предсказание, взятое из работы [4]. Справа – результат, полученный в модели BSTOGLLMNT.

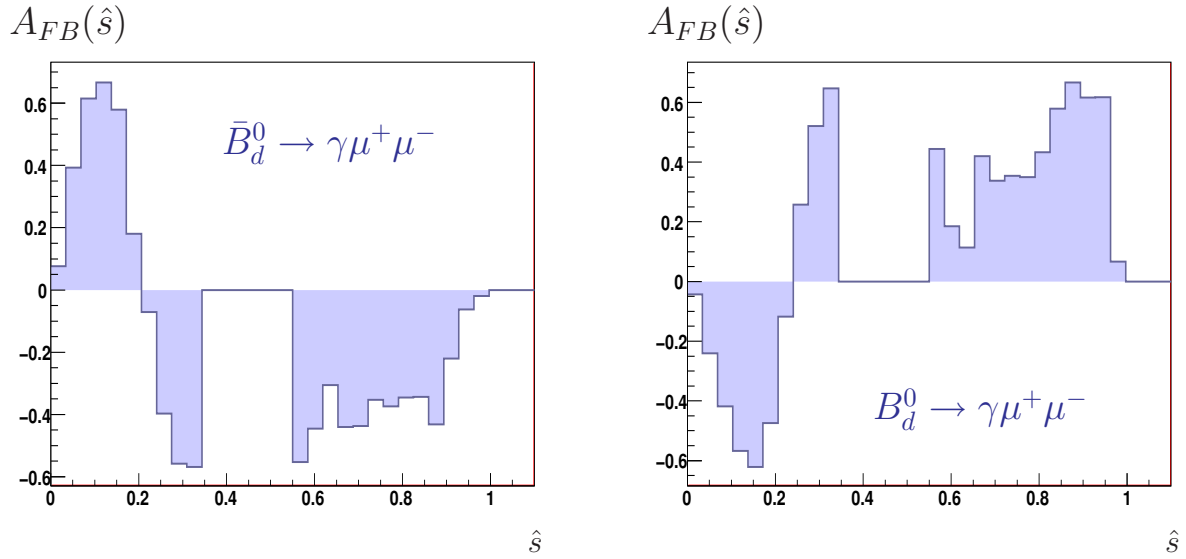


Рис. 11: Зарядовые лептонные асимметрии $A_{FB}(\hat{s})$ для распадов $\bar{B}_d^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (слева) и $B_d^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (справа), полученные в модели BSTOGLLMNT.

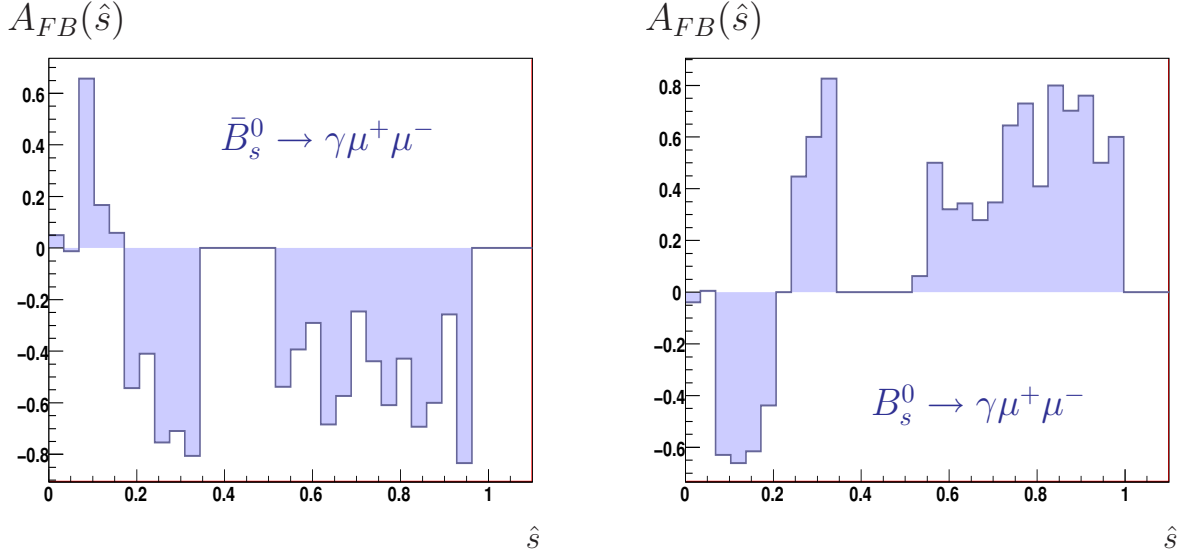


Рис. 12: Зарядовые лептонные асимметрии $A_{FB}(\hat{s})$ для распадов $\bar{B}_s^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (слева) и $B_s^0 \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ (справа), полученные в модели BSTOGLLMNT.

строить, например, независящую от времени CP -асимметрию, которая задается выражением

$$A_{CP}^{B_q \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-}(\hat{s}) = \frac{\frac{d\Gamma(\bar{B}_q \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-)}{d\hat{s}} - \frac{d\Gamma(B_q \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-)}{d\hat{s}}}{\frac{d\Gamma(\bar{B}_q \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-)}{d\hat{s}} + \frac{d\Gamma(B_q \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-)}{d\hat{s}}}.$$

В данном случае имеется полное расхождение между теоретическими предсказаниями и результатами работы модели BSTOGLLMNT как для распадов B_{d^-} , так и для распадов B_s -мезонов. Расхождение возникает по нескольким причинам. Во-первых, как показано в работе [4], форма $A_{CP}(\hat{s})$ чрезвычайно чувствительна к параметрам осцилляций нейтральных B -мезонов. Эти параметры различны в работе [4] и в пакете EvtGen. Во-вторых, для достаточно точного воспроизведения формы CP -асимметрии необходимо иметь статистику смоделированных событий более чем на порядок превосходящую статистику, которая имеется в настоящий момент. Набрать столь большую статистику за разумное время представляется практически не реальным. Кроме того, изучение CP -нарушения в редких радиационных лептонных распадах B -мезонов не является актуальной задачей для установки ЛНСб в первые годы ее работы. Напротив, измерение парциальных ширин редких радиационных лептонных распадов B -мезонов может быть произведено в первые годы работы ускорителя ЛНС. А для изучения возможности регистрации редких радиационных лептонных распадов B_q -мезонов модель BSTOGLLMNT является полностью адекватной.

2.3 Дальнейшее развитие модели

Имеется несколько направлений, по которым может происходить развитие модели BSTOGLLMNT.

Первое направление связано с оптимизацией алгоритма генерации событий. В настоящее время в модели BSTOGLLMNT принят стандартный алгоритм принятия/отбрасывания событий из пакета EvtGen, который в промежутке от минимума до максимума матричного элемента разыгрывает события с одинаковой плотностью и весом. Данный алгоритм очень плохо подходит для эффективного моделирования узких резонансных вкладов, поскольку в этом случае большинство сгенерированных событий приходится отбрасывать. В литературе описан целый ряд алгоритмов, которые позволяют на порядки повысить эффективность генерации событий с резонансным вкладом. Эти алгоритмы можно реализовать для модели BSTOGLLMNT.

Второе направление связано с получением распределений для $A_{CP}(\hat{s})$, совпадающих с теоретическими предсказаниями. Для этого необходимо разобраться с алгоритмами моделирования осцилляций $B_{d,s}^0$ -мезонов в пакете EvtGen и оптимизировать работу модели BSTOGLLMNT для эффективного набора статистики.

Заключение

1) Для программного пакета EvtGenExtras (и пакета EvtGen) создан Монте-Карло генератор, который моделирует редкие радиационные лептонные распады $\bar{B}_q^0(B_q^0) \rightarrow \gamma\ell^+\ell^-$ в рамках стандартной модели. Генератор описывает шесть различных каналов распадов при $q = \{d, s\}$ и $\ell^\pm = \{e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm\}$.

2) Генератор включает в себя формфакторы адронных переходов, вычисленные в рамках дисперсионной формулировки кварковой модели и гипотезы доминантности векторных мезонов, масштабную зависимость вильсоновских коэффициентов и эффекты CP -нарушения.

3) Работа генератора протестирована на статистике порядка 30 тысяч событий. Найдено, что в пренебрежении эффектами CP -нарушения имеется прекрасное согласие между результатами Монте-Карло моделирования и теоретическими предсказаниями для основных дифференциальных распределений.

4) Соответствующая модель, которая носит название BSTOGLLMNT, включена в официальное программное обеспечение коллаборации LHCb и может быть доступна начиная с пакетов Gauss версии v38r6 и EvtGenExtras версии v2r4. Однако, рекомендуется использовать модель, соответствующую пакетам Gauss версии v38r7, EvtGenExtras версии v2r5 и DecFiles версии v21r5.

Благодарности

Авторы благодарны нашим коллегам д.ф.-м.н. Д.И.Мелихову, к.ф.-м.н. К.С.Томсу, др. Г.Корти (Dr.Gloria Corti), др. В.Рису (Will Reese), аспирантке физического факультета МГУ И.А.Балакиревой и студенту физического факультета МГУ И.А.Комарову за плодотворные дискуссии, моральную поддержку и живой интерес к данной работе.

Работа частично поддержана грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ НШ-4142.2010.2 и Федеральным агентством по науке и инновациям, госконтракт №02.740.11.0244.

Список литературы

- [1] CERN Bulletin BUL-NA-2010-165, <http://cdsweb.cern.ch/record/1274486/>
- [2] F. Kruger and D. Melikhov, Phys. Rev. D **67**, 034002, (2003).
- [3] D. Melikhov and N. Nikitin, Phys. Rev. D **70**, 114028, (2004); D. Melikhov, N. Nikitin, and K. Toms, Phys. At. Nucl. **68**, 1842 (2005).
- [4] I. Balakireva, D. Melikhov, N. Nikitin and D. Tliso, Phys. Rev. D **81**, 054024, (2010).
- [5] The GAUSS Project, <http://lhcb-release-area.web.cern.ch/LHCb-release-area/DOC/gauss/>
- [6] The EvtGen package home page, <http://www.slac.stanford.edu/lange/EvtGen/>
- [7] EvtGen in LHCb,
<http://lhcb-release-area.web.cern.ch/LHCb-release-area/DOC/gauss/generator/evtgen.php>
P. Harrison, An introduction to EvtGen in LHCb (2010),
<http://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=2&resId=0&materialId=slides&confId=94046>
- [8] Н. В. Никитин, Д. В. Саврина, К. С. Томс, Препринт НИИЯФ МГУ N 2009–5/849.
- [9] The GAUSS Project Packages,
<http://lhcb-release-area.web.cern.ch/LHCb-release-area/DOC/gauss/packages/>
- [10] I. Komaroff, N. Nikitin, D. Savrina, LHCb Internal Note, LHCb-INT-2010-007.
- [11] W. Altmannshofer, P. Ball, A. Bharucha, A. J. Buras, D. M. Straub, M. Wick, JHEP 0901:019 (2009).
- [12] M. Whitehead, EvtGen and Dec Files (2010),
<http://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=5&resId=0&materialId=slides&confId=94046>
- [13] F. Kruger and L. M. Sehgal, Phys. Rev. D **55**, 2799 (1997); **56**, 5452 (1997); **60**, 099905 Erratum (1999).
- [14] T. Inami and C. S. Lim, Prog. Theor. Phys. **65**, 297 (1981); B. Grinstein, M. B. Wise, and M. J. Savage, Nucl. Phys. B **319**, 271 (1989); A. Buras and M. Munz, Phys. Rev. D **52**, 186 (1995); C. Bobeth *et al.*, JHEP **0404**, 071 (2004).

- [15] D. Melikhov, N. Nikitin, and S. Simula, *Phys. Lett. B* **430**, 332 (1998).
- [16] D. Melikhov, O. Nachtmann, V. Nikonov, and T. Paulus, *Eur. Phys. J. C* **34**, 345 (2004).
- [17] I. I. Bigi and A. I. Sanda, *CP-Violation*, 2 ed., (Cambridge University Press, 2009).
- [18] D. Melikhov and B. Stech, *Phys. Rev. D* **62**, 014006 (2000).
- [19] G.Gorti et. al., LHCb Internal Note LHCb-2005-034.
- [20] A. Ishikawa *et al.* (BELLE Collab.), *Phys. Rev. Lett.* **96**, 251801, (2006); I. Adachi *et al.* (BELLE Collab.), arXiv:0810.0335 [hep-ex]; J.-T.Wei *et al.* (BELLE Collab.), arXiv:0904.0770 [hep-ex]; B. Aubert *et al.* (BABAR Collab.), *Phys. Rev. D* **79**, 031102(R) (2009).

Николай Викторович Никитин, Александр Викторович Попов,
Дарья Викторовна Саврина

**Монте-Карло генератор редких радиационных
лептонных распадов B -мезонов для пакета
EvtGenExtras**

Препринт НИИЯФ МГУ N 2010–4/861

Работа поступила в ОНТИ *01 сентября 2010 г.*