НИИ Ядерной Физики
имени Д.В. Скобельцына

С.Ю. Вернов

ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Препринт НИИЯФ МГУ 2004–18/757

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО–ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

С.Ю. Вернов

ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Препринт НИИЯФ МГУ 2004–18/757

УНЦ ДО
Москва
2004

УДК 517.938
ББК 22.161.6
В35

Vernov S.Yu.
Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics MSU
e-mails: svernov@theory.sinp.msu.ru

CONSTRUCTION OF GLOBAL MULTI-VALUED SOLUTIONS FOR DYNAMIC SYSTEMS

Preprint SINP MSU 2004–18/757

Abstract

The algebraic method for the search of the analytic form of solutions for autonomous nonintegrable systems is proposed. This algorithm is a generalization of the known methods for the search of singlevalued solutions. We seek solutions as polynomials in a function, which satisfies some autonomous polynomial first order differential equation. To find analytic solutions we use local (the Puiseux series) solutions of the initial nonintegrable system. The local solutions can be obtained by the Painlevé analysis. Given algorithm can be automatized due to computer algebra systems.

Keywords: nonintegrable systems, the Painlevé analysis, a polynomial potential, the Puiseux series, multi-valued functions, special solutions.

Вернов С.Ю.
Научно–Исследовательский Институт Ядерной Физики МГУ

ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Препринт НИИЯФ МГУ 2004–18/757

Аннотация

Предложен алгебраический метод поиска аналитического вида многозначных решений автономных неинтегрируемых систем. Данный алгоритм является обобщением известных методов поиска однозначных решений. Решение ищется в виде полиномов по степеням функций, удовлетворяющих автономному полиномиальному дифференциальному уравнению первого порядка. При поиске аналитических решений используются локальные (в виде ряда Пюизё) решения исходной неинтегрируемой системы. Локальные решения получаются с помощью анализа Пенлеве. Предложенный алгоритм может быть автоматизирован с помощью систем компьютерной алгебры.

1 ВВЕДЕНИЕ

Системы дифференциальных уравнений, моделирующие те или иные физические явления, чаще всего оказываются неинтегрируемыми. Отличительной чертой подобных систем является многозначность их общих решений (известных только локально) на комплексной плоскости независимой переменной (времени). При этом частные решения могут оказаться однозначными функциями, мероморфными на всей комплексной плоскости независимой переменной. Методы поиска аналитического вида однозначных частных решений неинтегрируемых систем активно развиваются, особенно в последние двадцать лет [1–8] (см. также [9, Гл. 4] и ссылки в ней). Целью данной статьи является изложение алгебраического метода поиска аналитического вида многозначных решений, разлагающихся в окрестности особых точек в ряд Пюизё. Рассматриваемый метод является обобщением метода поиска однозначных решений, основанного на изучении локальных решений неинтегрируемых систем в виде рядов Лорана [7].

Систематический поиск частных решений неинтегрируемых систем практически невозможен без использования систем компьютерной алгебры. Предлагаемый алгоритм реализован автором на языках компьютерной алгебры Maple [10] (пакет подпрограмм приведён в Приложении) и REDUCE [11, 12]. Данные процедуры можно использовать и для поиска однозначных решений по методу Конта–Мюзетте [7].

2 МЕТОДЫ ПОИСКА ОДНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть дано автономное полиномиальное дифференциальное уравнение порядка n

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t)) = 0, \qquad (1)$$

иными словами, функция F является полиномом по y и её производным и не зависит явно от t.

Требуется найти частное решение

$$y(t) = P_L \varrho^L(t) + P_{L-1}\varrho^{L-1}(t) + \ldots + P_0,$$

где P_k, $k = 1, 2, \ldots, L$ — константы, а $\varrho(t)$ — общее решение некоторого автономного полиномиального дифференциального уравнения первого порядка:

$$R(\varrho, \varrho_t) = 0, \qquad \varrho_t \equiv \frac{d\varrho}{dt}. \tag{2}$$

Единственно возможными однозначными решениями уравнения (2) оказываются либо рациональная функция, либо рациональная функция от показательных или тригонометрических функций, либо эллиптическая функция [13, Гл. 2]. Для того, чтобы общее решение уравнения (2) было однозначной функцией комплексной переменной необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{(p+1)(m-k)/p} h_{jk}\,\varrho^j \varrho_t{}^k = 0, \quad h_{0m} = 1, \tag{3}$$

где m определяет старшую степень первой производной, h_{jk} являются константами, а p — порядок полюсов общего решения уравнения[1].

В статье [6] в качестве уравнения (3) было выбрано

$$\varrho_t^2 = \sum_{j=0}^{r} A_j\,\varrho^j, \tag{4}$$

где A_j — произвольные числа. Из требования однозначности решений следует, что $r \leqslant 4$, а из требования наличия полюсов — $r \geqslant 3$. С помощью анализа решений в окрестности их сингулярных точек получаем соотношение:

$$p = \frac{2L}{r-2}. \tag{5}$$

Заметим, что так как функция

$$\tilde{\varrho} = \left(\varrho - \frac{P_{L-1}}{L}\right) / \sqrt[L]{P_L}$$

[1] Суммирование в (3) идёт по целым неотрицательным j, меньшим или равным $(p+1)(m-k)/p$.

тоже является решением уравнения (4), то без ограничения общности можно положить $P_L = 1$ и $P_{L-1} = 0$. Для получения частного решения необходимо совместно с уравнением (1) решать уравнение (3) с неизвестными коэффициентами. Если уравнение (3) имеет вид (4), то легко провести подстановку и получить нелинейную систему алгебраических уравнений на коэффициенты P_k и A_j, решив которую получаем частные решения в виде эллиптических функций, возможно, вырожденных [6]. Этот метод, независимо применённый в [8], позволил получить новые эллиптические и тригонометрические решения обобщённой системы Хенона–Хейлеса. В общем случае и переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим, и решение получаемой нелинейной алгебраической системы далеко не тривиальны.

Иной алгоритм построения частных решений уравнения (1) в виде общих решений уравнения (3) был предложен в [7] и состоит в следующем. Вначале строится решение уравнения (1) в виде ряда Лорана, при этом используется алгоритм Абловица–Рамани–Сегура [14] (см. также [9, 15]). Подставив решение в виде ряда Лорана (точнее, конечной суммы его первых членов) в уравнение (3), превращаем его в систему линейных уравнений на коэффициенты h_{ij}. Количество используемых членов ряда Лорана должно превышать число неизвестных h_{ij} как минимум на число произвольных параметров, входящих в рассматриваемый ряд Лорана. В результате все h_{ij} выражаются через данные произвольные параметры, для которых получаем систему нелинейных уравнений. Отметим, что число неизвестных в получаемой алгебраической системе не зависит от количества произвольных коэффициентов в уравнении (3). Так как полином от эллиптической функции, будучи эллиптической функцией, сам является решением некоторого уравнения вида (3), то при поиске однозначных решений можно, без потери общности, положить $y = \varrho$.

При компьютерной реализации важно построить алгоритм так, чтобы не вычислять коэффициенты ряда Лорана, которые не используются впоследствии. Эта задача была решена Контом с помощью α–метода теста Пенлеве [16]. Соответствующая программа написана на языке AMP [17]. Более простая реализация, также не предполагающая ненужных вычислений, была предложена автором в виде пакета подпрограмм на языках Maple [18] и REDUCE. В данной статье на основе вышеизложенных алгоритмов будет предложен алгоритм поиска аналитического вида некоторого класса многозначных решений, который также легко записывается в виде компьютерной программы. Соответствующий пакет Maple процедур представлен в Приложении.

3 АЛГОРИТМ ПОИСКА МНОГОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Обобщим рассмотренный в предыдущем разделе алгоритм с целью поиска определённого вида многозначных решений. Будем искать решения в виде полинома по степеням функции, удовлетворяющей уравнению (3) при условии, что $p = 1/q$, где q — натуральное число. Общие решения таких уравнений будут иметь особенности вида $t^{-1/q}$ и разложения в окрестности особенностей в виде ряда

$$\varrho = \sum_{j=-1}^{\infty} C_{j/q} t^{j/q}. \qquad (6)$$

Функцию y, разлагающуюся в ряд Пюизё

$$y = \sum_{k=-L}^{\infty} S_{k/q} t^{k/q}, \qquad (7)$$

где L — натуральное число, будем искать в виде полинома степени L от функции ϱ, удовлетворяющей уравнению (3).

Алгоритм поиска подобных решений следующий:

Шаг 1. Определить параметры исходного уравнения (1), при которых для заданного q существуют локальные решения вида (7). Данный шаг состоит в тесте Пенлеве исходного нелинейного уравнения, после него определяется также значение L.

Шаг 2. Преобразование уравнения (1) с помощью замены

$$y = \varrho^L + P_{L-2}\varrho^{L-2} + P_{L-3}\varrho^{L-3} + \ldots + P_0.$$

Шаг 3. Построение локальных решений в виде (6), то есть определение коэффициентов $C_{j/q}$ как функций от P_k и параметров системы. При этом некоторые коэффициенты могут остаться новыми произвольными параметрами. Алгоритм построения частных решений в виде рядов Лорана, описанный в [19], тривиально обобщается на случай рядов Пюизё.

Шаг 4. Выбор m и подстановка полученных значений $C_{j/q}$ в уравнение (3) и преобразование данного уравнения в систему алгебраических уравнений.

Шаг 5. Исключение всех h_{ij} из системы.

Шаг 6. Решение оставшейся нелинейной системы и определение P_k и других параметров, входящих в коэффициенты $C_{j/q}$.

4 ПРОБЛЕМЫ ПРИ ПОИСКЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ВИДА РЕШЕНИЙ

При компьютерном счёте трудности вызывает только последний шаг, так как полученную систему часто не удаётся решить с помощью стандартных процедур решения нелинейных алгебраических систем. Эта проблема носит скорее технологический, чем принципиальный характер, поскольку алгоритм Бухбергера гарантирует построение базиса Грёбнера за конечное число шагов [20]. Система, для которой построен базис Грёбнера в лексикографическом упорядочении, фактически решена.

К сожалению, даже в случае однозначных решений указанные алгоритмы не позволяют найти все возможные решения. Во-первых, решение может выражаться не через решения уравнений первого порядка, а через решения более сложных уравнений (пример автономного уравнения, решения которого являются функциями от трансцендентных Пенлеве, приведён в [7]). Во-вторых, не все решения, выраженные в терминах эллиптических функций, могут быть найдены существующими методами поиска частных решений.

В качестве примера рассмотрим простейший интегрируемый случай системы Хенона–Хейлеса, описываемый гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2 + x^2 + y^2) + x^2 y + \frac{1}{3}\, y^3 \tag{8}$$

и системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{tt} = \,-x - 2xy, \\ y_{tt} = \,-y - x^2 - y^2. \end{array} \right. \tag{9}$$

Переменные разделяются заменой координат:

$$z_1 = x + y, \qquad z_2 = x - y. \tag{10}$$

Общее решение представимо в виде суммы двух эллиптических функций Вейерштрасса. Отношение периодов этих функций определяется значениями интегралов и может быть произвольным действительным числом. Если данное отношение оказывается иррациональным, то x и y не являются эллиптическими функциями и, следовательно, не удовлетворяют уравнениям типа (2), при этом их сумма и разность являются эллиптическими функциями Вейерштрасса. Таким образом, без замены координат существующие методы позволяют найти только частные решения данной модели. При наличии дополнительного неполиномиального члена общие решения в интегрируемых случаях системы Хенона–Хейлеса получаются в виде суммы гиперэллиптических функций [21, 22], методов поиска подобных однозначных решений в случае неинтегрируемых систем не существует.

В случае многозначных решений существование подходящего локального решения также не гарантирует результативности поиска решения в аналитическом виде, особенно, если требуется найти решение, зависящее от нескольких произвольных параметров.

В то же время знание аналитического вида частных одно- и двухпараметрических решений оказывается очень полезным в физических моделях. Упомянутые ограничения подсказывают пути развития методов поиска частных решений в аналитическом виде, а именно, обобщение класса пробных уравнений (3) и сочетание рассмотренных процедур с поиском системы координат, в которой решения имеют наиболее простой вид.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен метод поиска аналитического вида частных многозначных решений неинтегрируемых систем по известному локальному виду (рядам Пюизё) данных решений. И при построении решений в виде ряда, и при поиске их аналитического вида используются только алгебраические операции и решаются только алгебраические системы, что позволяет автоматизировать алгоритм методами компьютерной алгебры.

Автор выражает благодарность В.Ф. Еднералу и Р. Конту (R. Conte) за полезные обсуждения. Данная работа поддержана грантом Президента России НШ-1685.2003.2 и грантом научной Программы "Университеты России" 02.03.028.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведены процедуры, написанные на языке компьютерной алгебры Maple [10]. Данные процедуры позволяют строить системы уравнений на коэффициенты h_{ij}, исходя из уравнения вида (3) и заданного ряда Лорана или Пьюзё, при этом ряд Пьюзё должен начинаться с $p = 1/q$, где q — целое число.

Пусть задан ряд

$$y = \sum_{k=-p}^{\infty} c(k) t^k,$$

где p либо целое, либо 1, делённая на целое. В последнем случае суммирование идёт с шагом p. Константы $c(k)$ известны. Для построения системы (3) используется только конечное число членов ряда Лорана. При этом известность $c(k)$ не предполагает, что они должны быть заданы для корректной работы процедур. Обозначим правую часть уравнения (3) в виде функции от y и y_t:

$$F(y_t, y) \equiv \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{j<=(m-k)(p+1)/p} h_{jk}\, y^j y_t^k = 0, \qquad h_{0m} = 1. \tag{3'}$$

В точке сингулярности y_t^m стремится к бесконечности как $m(p+1)$, поэтому функция $F(y_t, y)$ может быть представлена в виде следующего ряда

$$F(y_t, y) = \sum_{s=-m(p+1)}^{\infty} K_s t^s. \tag{11}$$

Таким образом, уравнение $(3')$ превращается в бесконечную переопределённую систему линейных уравнений $K_s = 0$ на h_{ij}. Необходимо рассматривать только конечное число (N_{max}) членов ряда (11), большее, чем число неизвестных коэффициентов h_{ij} как минимум на количество произвольных параметров, входящих в коэффициенты K_s. Для заданных m и p число неизвестных коэффициентов h_{ij} вычисляется процедурой $quvar(m, p)$. Процедура $equa(a, m, p, y, dy)$ строит уравнение $(3')$, а процедура $equalaur(a, m, p, Nmax)$ вычисляет первые $Nmax$ коэффициентов ряда (11). Данная процедура работает только для рядов Лорана. Слабым местом процедуры $equalaur$ является то, что она вычисляет лишние члены ряда Лорана, точнее, для некоторых слагаемых уравнения $(3')$ она вычисляет больше членов ряда Лорана, чем для других, в результате расходуется лишняя оперативная память компьютера. Решение этой проблемы для случая рядов Лорана, основанное на α-методе теста Пенлеве, было реализовано Р. Контом на языке AMP [17].

Предлагаемая в настоящей статье Maple реализация — процедура $equlaurlist(a, m, p, ove, c)$, использует явные преобразования ряда Лорана или Пьюзё и также вычисляет только необходимые члены ряда (11). Рассмотрим работу данной процедуры. Мы полагаем, что $a(0, m) = 1$, а остальные $a(i, j)$ неизвестны. Процедура $equlaurlist(a, m, p, ove, c)$ делает следующее:

1) Вычисляет требуемое число членов ряда (11):

$$Nmax := quvar(m, p) + ove;$$

2) Строит список, соответствующий $(3')$:

$$fequlist := equalist(a, m, p);$$

3) Для упрощения последующих процедур полагает несуществующие члены ряда Лорана (Пьюзё) равными 0:

$$\forall k = -m(p+1)..-p-q : c(k) = 0;$$

где $q = 1$ в случае ряда Лорана и $q = p$ в случае ряда Пьюзё.

4) Строит список коэффициентов K_s (*laurlist*) из уравнения (11). Коэффициент при t^k строится процедурой *oneequlaur*.

Полученная система оказывается линейной по $a[i, j]$ и нелинейной по параметрам, от которых зависят коэффициенты ряда.

Описанные процедуры составляют пакет *ellipaso* (elliptic particular solutions):

```
ellipaso:=table();



ellipaso[quvar]:=proc(m::integer, p)
# 10.10.2003
# This procedure calculates the number of  unknown
# coefficients of the first order autonomous ODE,
# which solutions tend to infinity as 1/t^p.
# The maximal degree of dy is m.
# The coefficient of dy^m is assumed to be known.

local k, j, numterm;
numterm:=0;
for k from 0 to m-1
    do for j from 0 while p*j <= (p+1)*(m-k)
       do numterm:=numterm+1;
       od;
    od;
return numterm;
end;
```

```
ellipaso[equa]:=proc(a, m::integer, p, yp2, dyp2)
# 10.3.2003
# This procedure constructs the first order  ODE,
# which solutions tend to infinity as 1/t^p.
# The maximal degree of dy is m.

local equ, k, j, numterm;
equ:=0;
for k from 0 to m
    do for j from 0 while p*j <= (p+1)*(m-k)
       do equ := equ+a[j,k]*yp2^j*dyp2^k;
       od
    od;
return equ;
end;


ellipaso[equalaur]:=proc(a, m::integer,
                    p::integer, Laurentmax::integer)

# 10.10.2003
# This procedure expands the first order
# polynomial autonomous ODE in the Laurent series,
# including terms from 1/t^p to t^(Laurentmax-p).
# The maximal degree of dy is m.
# Laurentmax is more than quvar(m,p).

local max,equ,k,j,y,dy,equlist,t;
equ:=equa(a,m,p,yp,dyp);
y:=0;
for k from -p to Laurentmax-p do y:=y+c(k)*t^k od;
dy:=diff(y,t);
max:=quvar(m,p)+1;
```

```
if Laurentmax > max then max:=Laurentmax fi;
for k from 0 to m
  do dyp(k):=convert(taylor(eval(dy**k*t^((p+1)*m)),
                                t,max),polynom)
  od;
for k from 0 to iquo(m*(p+1),p)
  do yp(k):=convert(taylor(eval(y**k*t^((p+1)*m)),
                               t, max),polynom)
  od;
equlist:=[];
equ:=expand(eval(equ*t^(-(p+1)*m)));
for k from 1 to max
  do equlist:=[op(equlist),asubs(t=0,equ)];
     equ:=diff(equ,t)/k;
  od;
return equlist;
end;


ellipaso[equalist]:=proc(a, m::integer, p)
# 30.10.2003
# This procedure constructs the first order
# autonomous ODE as a list.
# Solutions tend to infinity as 1/t^p.
# The maximal degree of dy is m.

local fequlist, k, j;
fequlist:=[];
for k from 0 to m
    do for j from 0 while p*j <= (p+1)*(m-k)
       do fequlist:=[op(fequlist),[a[j,k],j,k]];
       od
    od;
```

```
return fequlist
end;


ellipaso[ydegree]:=proc(c,n,j,p)
# 27.07.2004
# This procedure constructs the j-th term of
# the Laurent series for y^n.
# Solutions tend to infinity as 1/t^p.

local sumy,k,stepp;
if n=1 then return c(j)
   else sumy:=0;
        if p<1 then stepp:=p else stepp:=1 fi;
        for k from -p to j+p*n by stepp
        do
         sumy:=sumy+c(k)*ydegree(c,n-1,j-k,p);
        od;
        return sumy;
fi;
end;


ellipaso[dydegree]:=proc(c,n,j,p)
# 27.07.2004
# This procedure constructs the j-th term of
# the Laurent series for dy^n.
# Solutions tend to infinity as 1/t^p.

local sumdy,k,stepp;
if n=1 then return (j+1)*c(j+1)
   else sumdy:=0;
        if p<1 then stepp:=p else stepp:=1 fi;
```

```
        for k from -(p+1) to j+(p+1)*n by stepp
        do sumdy:=sumdy+(k+1)*c(k+1)*
                 dydegree(c,n-1,j-k,p);
        od;
        return sumdy;
fi;
end;


ellipaso[monomlaur]:=proc(c,mon,j,p)
# 27.07.2003
# This procedure constructs the Laurent series
# for mon:=[coef,ydeg,dydeg].
# Solutions tend to infinity as 1/t^p.

local k,coef,ydeg,dydeg,sum,stepp;
coef:=op(1,mon);
ydeg:=op(2,mon);
dydeg:=op(3,mon);
if ydeg=0 then
  if dydeg=0 then
     if j=0 then return coef else return 0
     fi;
  else return coef*dydegree(c,dydeg,j,p)
  fi;
else if dydeg=0 then return coef*ydegree(c,ydeg,j,p)
     else sum:=0;
          if p<1 then stepp:=p else stepp:=1 fi;
          for k from -p*ydeg to j+(p+1)*dydeg by stepp
           do
             sum:=sum+ydegree(c,ydeg,k,p)*
                      dydegree(c,dydeg,j-k,p);
           od;
```

```
          return coef*sum;
     fi;
fi;
end;


ellipaso[oneequlaur]:=proc(c, fequlist, j, p)
# 27.07.2004
# This procedure constructs the j-th term of
# the Laurent series of the first order
# autonomous ODE (the list fequlist).
# solutions tend to infinity as 1/t^p.

local equj,k;
equj:=0;
for k from 1 to nops(fequlist)
   do equj:=equj+monomlaur(c,op(k,fequlist),j,p);
   od;
return equj;
end;


ellipaso[equlaurlist]:=proc(a,m::integer,p,
                              ove::integer,c)
# 27.07.2004
# This procedure constructs the Laurent series of
# the first order autonomous ODE
# with maximal degree of dy {y'} equal to m.
# Solutions tend to infinity as 1/t^p. c(k) are
# the Laurent (Puiseux) series coefficients of y.
# The length of the resulting list is quvar(m,p)+ove.

local k, laurlist, fequlist, Laurentmax,stepp;
```

```
if p<1 then stepp:=p else stepp:=1 fi;
Laurentmax:=quvar(m,p)+ove*stepp;
fequlist:=equalist(a,m,p);
for k from -m*(p+1) to -p-stepp by stepp
   do c(k):=0
   od;
laurlist:=[];
for k from -m*(p+1) to Laurentmax-m*(p+1) by stepp
   do
  laurlist:=[op(laurlist),oneequlaur(c,fequlist,k,p)]
   od;
 return laurlist;
end;
```

Список литературы

[1] *J. Weiss.* Phys. Lett. A. 1984. V. 102. P. 329; Phys. Lett. A. 1984. V. 105. P. 387.

[2] *G.S. Santos.* J. of the Physical Society of Japan. 1989. V. 58. P. 4301.

[3] *R. Conte, M. Musette.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5609.

[4] *В.А. Антонов, Е.И. Тимошкова.* Астрон. журн. 1993. Т. 70. С. 265.

[5] *Е.И. Тимошкова.* Астрон. журн. 1999. Т. 76. С. 470. {Русский}; Astr. Rep. 1999. V. 43. P. 406. {Английский}.

[6] *E. Fan.* J. of Physics A. 2003. V. 36. P. 7009.

[7] *M. Musette, R. Conte.* Physica D. 2003. V. 181. P. 70; nlin.PS/0302051, 2003.

[8] *С.Ю. Вернов, Е.И. Тимошкова.* Новые двухпараметрические решения обобщённой системы Хенона–Хейлеса, Препринт НИИЯФ МГУ,

2003-14/727, 2003. *E.I. Timoshkova, S.Yu. Vernov.* On two nonintegrable cases of the generalized Henon–Heiles system with an additional nonpolynomial term. math-ph/0402049, 2004.

[9] *Н.А. Кудряшов.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений, издание второе, Москва–Ижевск, РХД, 2004.

[10] *A. Heck.* Introduction to Maple, 3rd Edition. Springer–Verlag, New York, 2003.

[11] *A.C. Hearn.* REDUCE. User's and Contributed Packages Manual, Vers. 3.7. CA and Codemist Ltd, Santa Monica, California, 1999. http://www.zib.de/Symbolik/reduce/more/moredocs/reduce.pdf

[12] *В.Ф. Еднерал, А.П. Крюков, А.Я. Родионов.* Язык аналитических вычислений REDUCE. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[13] *В.В. Голубев.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Москва–Ленинград, Гостехиздат, 1950.

[14] *M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur.* Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 23 . P. 333; J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715; P. 1006.

[15] *М. Табор.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: УРСС, 2001. (*M. Tabor*, Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, Wiles, New York, 1989)

[16] *P. Painlevé.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, profeesées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwège, Hermann, Paris, 1897. Интернет версия: The Cornell Library Historical Mathematics Monographs, http://historical.library.cornell.edu/

Reprinted in: Œuvres de Paul Painlevé, V. 1 ed. du CNRS, Paris, 1973.

[17] *J.-M. Drouffe.* Simplex AMP reference manual, version 1.0 (1996), SPhT, CEA Sacley, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, 1996.

[18] *S.Yu. Vernov.*, proc. of the International Conference "Computer Algebra in Scientific Computing" (CASC'2004, Jule 12-19, 2004, St. Petersburg, Russia), eds. V.G. Ganzha, E.W. Mayr, E.V. Vorozhtsov, Technische Universitat, Munchen, Garching, Germany, 2004, pp. 457–465; nlin:SI/0407062.

[19] *С.Ю. Вернов.* ТМФ. 2003. Т. 135. Р. 409.

[20] *Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье.* Компьютерная алгебра. Системы и алгоритмы алгебраических вычислений. Москва. Мир. 1991. (*J. Davenport, Y. Siret, E. Tournier.* Calcul Formel, Systemes et Algorithmes de Manipulations Algebriques, Masson, Paris, New York, 1987.)

[21] *R. Conte, M. Musette, C. Verhoeven.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1906; nlin.SI/0112030. 2001.

[22] *К. Верховен, М. Музетте, Р. Конт.* ТМФ. 2003. Т. 134 С. 148; nlin.SI/0301011, 2003.

Сергей Юрьевич Вернов

Построение глобальных многозначных решений динамических систем

Препринт НИИЯФ МГУ 2004–18/757

Работа поступила в ОНТИ 30.09.2004 г.

Издательство УНЦ ДО
ИД № 00545 от 06.12.1999
117246, Москва, ул. Обручева, 55-А, УНЦ-ДО
Тел./Факс (095) 718-6966, -7767, -7785(комм.)
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
http://www.abiturcenter.ru

Заказное. Подписано в печать 30.09.2004г. Формат 60x90/16
Бумага офсетная № 2. Усл. печ.л. 1.25
Тираж 30 экз. Заказ № 676

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО
http://www.abiturcenter.ru/print
в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета