

На правах рукописи

Лукашенко Анастасия Тарасовна

**Модели магнитного поля
в околосолнечном пространстве**

Специальность 01.04.08 — Физика плазмы

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в отделе космических наук Научно-исследовательского института ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Веселовский Игорь Станиславович

Официальные оппоненты: **Жугжда Юзеф Данилович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН,
г. Москва, г. Троицк,
главный научный сотрудник

Похотелов Олег Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН,
г. Москва, зав. лабораторией геоэлектродинамики

Ведущая организация: Национальный исследовательский центр
«Курчатовский институт», г. Москва

Защита состоится 1 марта 2017 г. в 16 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.045 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 5 (19-й корпус НИИЯФ имени Д.В. Скобельцына МГУ имени М.В. Ломоносова), аудитория 2-15.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, а также по адресам в интернете:

http://www.sinp.msu.ru/ru/system/files/dissertations/dissertaciya_lukashenko.pdf

http://istina.msu.ru/media/dissertations/dissertation/bf6/677/33923217/Lukashenko_dissertatsiya.pdf

Автореферат разослан «19» января 2017 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.045

Вохник О.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Процессы в плазменных системах существенно зависят от морфологии (топологии и геометрии) силовых линий магнитного поля. Физически это обусловлено тем, что в достаточно сильном магнитном поле заряженные частицы плазмы движутся по спиралям, навивающимся на линии поля, и малоподвижны в перпендикулярных к этим линиям направлениях [1]. В этой связи интерес вызывают такие элементы структуры магнитных полей, как сами линии поля, трубки поля, магнитные поверхности, сепаратрисы, особые точки и т. д. Так, согласно существующим представлениям [2], магнитное пересоединение, которое представляет собой перестройку магнитного поля, обусловленную изменением связности его линий, приводит к нагреву вещества и ускорению частиц во время солнечных вспышек и авроральных суббурь. Пересоединение зачастую инициируется вблизи нулевых точек магнитного поля.

При моделировании магнитных полей в короне Солнца часто используется потенциальное приближение. Оно применяется как в моделях коронального поля в целом, так и при моделировании топологических конфигураций отдельных участков короны. К моделям первой категории относятся модели потенциального поля–поверхности источника (англ. potential field–source surface, сокращённо PFSS). Предполагается, что на поверхности источника (впервые введённой Шаттенем [3] и, независимо, Альтшулером и Ньюкиркком [4] в 1969 г.), линии поля становятся радиальными (если не учитывать вызванное вращением Солнца закручивание в спираль Архимеда). Физический смысл поверхности источника основан на предположении, что до неё энергия магнитного поля преобладает над энергией плазмы, а при переходе через неё преобладающей становится кинетическая энергия солнечного ветра. Значение радиуса поверхности источника подбирается так, чтобы вычисляемые результаты соответствовали наблюдаемой форме короны, и составляет, как правило, 2–3 R_{\odot} . Близкие по структуре модели используются и при моделировании магнитосфер планет. К их числу относятся модели с тонким токовым слоем [5] и [6].

Из исходных моделей с поверхностью источника следовало, что в минимуме солнечной активности на удалении от Солнца зависимость изменения радиальной компоненты вектора магнитного поля от гелиошироты носит дипольный характер. Однако, как показали измерения КА «Улисс» (Ulysses) [7], радиальная компонента поля, приведённая к одинаковому расстоянию от Солнца $B_r r^2$, приблизительно равна константе и от гелиошироты не зависит. В целом поле напоминало поле двух частей магнитных монополей разных знаков, склеенных вместе по тонкому токовому слою, лежащему в плоскости магнитного экватора. Вместе с полем магнитного диполя Солнца получается картина, напоминающая вид солнечной короны в годы минимума активности. Поэтому актуальным являлось такое усовершенствование модели PFSS, в котором учитывалась бы независимость плотности радиального магнитного потока от гелиошироты в околосолнечном пространстве.

К моделям второй категории можно отнести получившие широкое распространение модели «magnetic charge topology» (МСТ) [8]. Источниками магнитного поля в короне в основном являются выходящие на уровне фотосферы трубки магнитного потока, разбросанные по поверхности Солнца. Эти источники не статичны, а непрерывно движутся. Они могут сливаться, фрагментироваться, взаимно нейтрализовать друг друга и т. д. В результате магнитное поле в короне Солнца имеет крайне сложную структуру.

Существуют разные способы теоретического моделирования структуры магнитного поля в солнечной короне. Часто используется следующее упрощение: в качестве строительных блоков рассматриваются поля, создаваемые небольшим числом точечных источников. Такие точечные источники являются фиктивными, поскольку магнитных зарядов в природе не существует. В простейшем варианте в моделях МСТ источники с положительными и отрицательными зарядами располагают на поверхности фотосферы. Фотосферная поверхность при этом полагается плоской. Поле от источников убывает по закону обратных квадратов. В результате наложения полей от различных источников

могут возникать нулевые точки поля. При этом возможны нули двух сортов: фотосферные, лежащие на фотосферной плоскости, и корональные, то есть расположенные в пространстве над ней (полупространство под фотосферной плоскостью в моделях не рассматривается).

Не все математически возможные конфигурации, возникающие в МСТ, топологически стабильны, где под стабильностью понимается неизменность конфигурации при малых возмущениях. Устойчивыми являются изолированные нулевые точки 1-го порядка, принадлежащие к разновидности «неправильные радиальные нули» [2]. Однако имеется ряд ситуаций, когда возникает потребность в рассмотрении вырожденных нулевых точек. В первую очередь это относится к бифуркациям нулевых точек, сопровождающим перестройку топологии поля. В частности, распад вырожденного фотосферного нуля на невырожденные с последующим быстрым движением новой нулевой точки в короне имеет место в модели топологического триггера солнечных вспышек [9].

В точке, где вектор поля обращается в нуль, $\mathbf{V} = 0$, единственность решения дифференциального уравнения для линий поля

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{|\mathbf{V}|}, \quad (1)$$

где ds — элемент длины, может нарушаться, при этом в ней могут оканчиваться либо одномерные многообразия (изолированные линии, называемые γ -линиями), либо двумерные (образуемые силовыми линиями поверхности, называемые Σ -поверхностями) [10].

Классификация нулевых точек 1-го порядка и геометрия линий поля вблизи них в двух- и трёхмерном случаях описывались в литературе ранее неоднократно в связи с исследованиями магнитных полей в астрофизических условиях (см., например, [11]). Нули потенциального поля одного и того же порядка на плоскости имеют фиксированную геометрию окрестностей с точностью до поворота и масштабного фактора [12]. В диссертации дано их рассмотрение на основе разложения по однородным гармоническим полиномам. Достаточно полное описание нулей в пространстве порядка выше 1-го ранее отсутствовало; обзор для потенциалов, заданных отдельными сферическими гармониками, был дан

в [13], а некоторые частные случаи рассматривались в [14]. В общем случае, однако, разложение потенциала в ряд вблизи нулевой точки представляет собой линейную комбинацию сферических гармоник, число которых для нулевой точки порядка p равно $2p + 3$. В связи с этим необходим учёт такого комбинирования, поскольку оно даёт нулевые точки с новыми характеристиками. Кроме того, описание нулевых точек порядка выше 1-го усложняется тем, что вблизи них уравнения линий поля (1) зачастую не удаётся проинтегрировать аналитически, а также нелинейностью выражений для вектора поля. В связи с рассмотрением бифуркаций, а также учётом нелинейных эффектов в процессах пересоединения возникает потребность в нахождении математических методов их описания, а также систематизации существующих представлений.

В некоторых случаях в МСТ используются модели с зарядами не на поверхности фотосферы, а погружёнными под поверхность, или с погружёнными под поверхность магнитными диполями, или усложнённые иными способами [8]. Одним из возможных способов сделать модели МСТ более физически реалистичными было бы моделирование фотосферных потоковых трубок витками с током. Такая задача является многопараметрической. Возникает вопрос о разумных ограничениях на параметры. Для ответа на него необходимо исследовать возможные варианты поведения линий поля вблизи круговых токовых витков при их различном взаимном расположении в пространстве. Данная задача имеет также и более широкий теоретический интерес. Согласно существующим в настоящее время представлениям, наиболее общим случаем поведения магнитных силовых линий является случай, когда те не замкнуты и не ложатся на какие-либо магнитные поверхности [15]. Как было недавно показано [16], такого рода поведение силовых линий может создаваться даже очень простыми токовыми системами, в частности, оно возникает в системе из двух сцепленных круговых витков с токами. Публикация [16], наряду с более ранней работой [17], послужила отправным пунктом для ряда других работ, посвящённых рассмотрению хаотического поведения линий магнитного поля в простых токовых системах, в частности [18, 19].

Целью данной диссертационной работы являлось исследование, с применением как аналитических расчётов, так и методов математического моделирования, топологических и геометрических характеристик магнитного поля в ряде конфигураций на Солнце, во внутренней гелиосфере и в лабораторных условиях.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. В рамках потенциального приближения предложить модель, согласующуюся с измерениями КА «Улисс», согласно которым радиальное магнитное поле в гелиосфере практически не зависит от широты точки наблюдения в окосолнечном пространстве.
2. Предложить общие математические методы описания поведения линий магнитного поля (для случая потенциального поля) вблизи нулевых точек порядков 2-го и выше. Установить их связь с существующими способами характеристики нулевых точек 1-го порядка.
3. Установить характеристики нулевых точек 2-го порядка наиболее общего вида (невырожденных). Провести классификацию нулевых точек потенциального магнитного поля 2-го порядка.
4. Разработать методику моделирования и визуализации силовых линий магнитного поля вблизи токовых систем, состоящих из круговых витков, при различных вариантах взаимного расположения последних в пространстве.
5. Исследовать поведение силовых линий магнитного поля вблизи токовой системы из двух сцепленных круговых витков, расположенных в перпендикулярных плоскостях.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложена теоретическая модель для расчёта магнитного поля в короне в потенциальном приближении, представляющая собой модификацию модели с поверхностью источника. В этой модели магнитное поле на фотосфере задаётся по результатам наблюдений, а на удалении от Солнца модуль радиальной составляющей магнитного

поля не зависит от гелиошироты, а её знак скачкообразно изменяется при переходе от одной полусферы к другой. В модели учтены экспериментальные результаты, полученные на КА «Улисс». В рамках данной модели получены общие аналитические формулы для расчёта потенциала и магнитного поля. Проведены расчёты для дипольных и квадрупольных гармоник на фотосфере.

2. Разработана общая математическая методика описания и классификации нулевых точек порядка выше 1-го потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве. Показано, что это описание может быть упрощено за счёт нахождения подходящей системы базисных функций, по которым производится разложение потенциала в ряд Тейлора. Найдено, что для нулевых точек порядка выше 1-го в тех случаях, когда уравнения силовых линий в их окрестности не удаётся проинтегрировать аналитически, можно дать качественное описание геометрии этих линий путём рассмотрения поведения последних вблизи исходящих из нулевой точки лучей, на которых поле радиально или же равно нулю. Сформулирована соответствующая задача на собственные функции. Для 2-го порядка получен ряд аналитических решений общего характера. Результаты непосредственно обобщаются на произвольное векторное поле, потенциал которого удовлетворяет уравнению Лапласа.
3. С использованием методов математического моделирования дано описание поведения силовых линий магнитного поля системы из двух одинаковых сцепленных перпендикулярно токовых колец, в окрестности которой существуют области как упорядоченности, так и хаотичности. Показано, что на малых расстояниях происходит приближённая намотка силовых линий на вложенные друг в друга магнитные поверхности, охватывающие каждое из токовых колец по отдельности, а на удалении — на топологически эквивалентные торам вложенные поверхности, охватывающие систему как целое, тогда как область хаотичности располагается на промежуточных расстояниях. Найдены положения наиболее крупных «магнитных

островов» и численные характеристики возникающих подсистем замкнутых силовых линий.

Научная новизна:

1. Впервые в рамках потенциального приближения предложена модель магнитного поля в солнечной короне, в которой магнитное поле на фотосферной поверхности задаётся из результатов наблюдений, а на удалении модуль радиальной его составляющей полагается равным константе, а её знак — скачком изменяющимся при переходе от одной полусферы к другой. Модель согласуется с данными КА «Улисс».
2. Впервые дан алгоритм описания геометрии и топологии силовых линий магнитного поля вблизи нулевых точек потенциального магнитного поля высших порядков. Показано, как такое описание может быть упрощено посредством подходящего выбора системы базисных функций, по которым производится разложение потенциала в ряд Тейлора. Найдена общая методика получения качественных сведений о поведении линий поля вблизи нулевых точек высших порядков. Впервые дана формулировка соответствующей задачи на собственные функции для случая нулевых точек порядка выше 1-го. Для нулевых точек 2-го порядка впервые найден ряд решений, как частных, так и общего характера.
3. Разработанная методика описания нулевых точек впервые применена для характеристики бифуркаций, в том числе в модели топологического триггера солнечных вспышек.
4. Впервые были получены численные характеристики областей упорядоченного и хаотического поведения линий магнитного поля в окрестности простейшей системы из двух сцепленных колец с токами.
5. Произведены численные расчёты магнитного поля системы токовых катушек, созданной в ИЛФ СО РАН и моделирующей магнитное поле сверхпроводящего магнита спектрометра AMS-02.

Практическая значимость диссертационной работы определяется разработкой новых теоретических подходов к описанию особых точек бездивергентных векторных полей, моделирования магнитных

полей в потенциальном приближении в солнечной короне и во внутренней гелиосфере, а также дальнейшего совершенствования модели топологического триггера солнечных вспышек.

Достоверность и обоснованность изложенных в работе результатов обеспечивается согласованностью с выводами литературных источников по теме диссертации в тех случаях, когда такие результаты имеются. Выполненные численные расчёты были перепроверены путём использования различных методов счёта. Основные положения диссертации публиковались в ведущих журналах по астрономии и геомагнетизму.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на конференциях:

1. 6-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе». ИКИ РАН, Москва, Россия, 14–18 февраля 2011
2. IAGA-III Symposium: «Heliospheric physics during and after a deep solar minimum». Luxor, Egypt, 12–17 November 2011
3. 7-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе». ИКИ РАН, Москва, Россия, 6–10 февраля 2012
4. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2012. НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 30 января–4 февраля 2012
5. XVIII всероссийская ежегодная конференция с международным участием «Солнечная и солнечно-земная физика – 2014». Пулково, Санкт-Петербург, Россия, 20–24 октября 2014
6. 10-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе». ИКИ РАН, Москва, Россия, 16–20 февраля 2015
7. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 16–21 февраля 2015
8. XII Международная Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы». Республика Татарстан, Россия, 27 июня–3 июля 2015
9. 597th WE-Heraeus-Seminar «Stochasticity in Fusion Plasmas». Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 10–12 September 2015

10. XIX Всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика – 2015». Пулково, Санкт-Петербург, Россия, 5–9 октября 2015
11. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015-2. НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 22–26 декабря 2015
12. 11-я ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе». ИКИ РАН, Москва, Россия, 15–19 февраля 2016
13. AGU Chapman Conference. Dubrovnik, Croatia, 22–27 May 2016
14. XX Всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика – 2016». Пулково, Санкт-Петербург, Россия, 10–14 октября 2016

Также материалы по теме диссертации докладывались на научном семинаре «Астрофизика космических лучей и физика космоса» НИИЯФ МГУ, на семинарах в Научно-исследовательском центре «Курчатовский институт» и Институте физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН и на 22-й конференции-школе «Актуальные проблемы физики и технологий» в Институте общей физики им. А.М. Прохорова РАН.

Личный вклад: все математические программы и расчётные работы по ним были подготовлены и выполнены лично автором. Постановка задач, аналитическая часть исследования, планирование работ, обсуждение результатов и публикация основных результатов осуществлялись совместно с научным руководителем. Роль автора в получении положений, выносимых на защиту, является определяющей.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 статьях: [А.1–А.9], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [А.1–А.4], 5 – в сборниках трудов конференций [А.5–А.9].

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и трёх приложений. Полный объём диссертации составляет 167 страниц с 52 рисунками и 19 таблицами. Список литературы содержит 140 наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава представляет собой краткий обзор исследований геометрических и топологических характеристик линий потенциального магнитного поля.

Вторая глава посвящена описанию модели магнитного поля во внутренней гелиосфере, согласующейся с измерениями аппарата «Улисс», согласно которым радиальное магнитное поле в ней практически не зависит от широты точки наблюдения в околосолнечном пространстве.

В рассматриваемой модели пространство вне Солнца разделяется на ряд областей. Первая из них, обозначенная римской цифрой I (см. схему на рис. 1), представляет собой шаровой слой между фотосферой $r = R_{\odot}$ и поверхностью источника (source surface) $r = R_s$. Внешним по отношению к ней является шаровой слой между поверхностью источника R_s и поверхностью выравнивания (leveling surface) R_L , на которой модуль радиальной составляющей магнитного поля положен равным константе, а её знак — изменяющимся на противоположный при переходе через экватор. В этом шаровом слое проведён разрез в экваториальной плоскости, который разделяет его на две симметричные части. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть только «северную» половину шарового слоя ($\theta \leq \frac{\pi}{2}$), для обозначения которой используется римская цифра II. Наконец, область, представляющая собой внешнюю по отношению к полусфере $r = R_L$, $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ часть полупространства, будем обозначать цифрой III.

Радиальная компонента магнитного поля на фотосфере:

$$B_r(R_{\odot}, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \quad (2)$$

где коэффициенты g_{nm} и h_{nm} предполагаются известными из наблюдений.

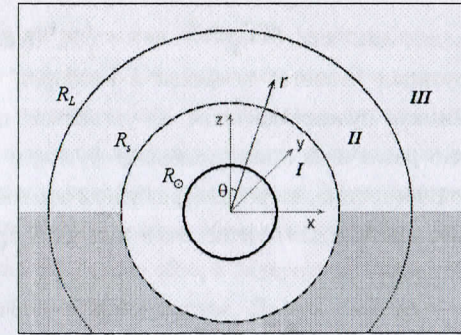


Рис. 1. Схематическое изображение разбиения пространства в модели на области I, II и III.

Решение в области I не отличается от соответствующего решения при постановке стандартной задачи с поверхностью источника. В области II краевая задача для уравнения Лапласа приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta U_{II} = 0, & R_s < r < R_L, \quad \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial U_{II}}{\partial r} \Big|_{r=R_s} = f(\theta, \varphi), \\ \frac{\partial U_{II}}{\partial r} \Big|_{r=R_L} \equiv \text{const}, \\ \frac{\partial U_{II}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$f(\theta, \varphi) \equiv B_r(R_s, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \quad (4)$$

и использовано обозначение

$$V_n = \frac{(2n+1) \left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^{n+2}}{n+1+n \left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^{2n+1}}. \quad (5)$$

Присоединённые функции Лежандра обладают следующим свойством чётности [20]:

$$P_n^{(m)}(x) = (-1)^{n-m} P_n^{(m)}(-x). \quad (6)$$

Граничному условию при $\theta = \frac{\pi}{2}$ будут удовлетворять чётные присоединённые функции Лежандра, т. е. те, для которых разность $n - m$ —

чётное число, так как $\frac{dP_n^{(m)}(\cos \theta)}{d\theta} = -\left(P_n^{(m)}(\cos \theta)\right)' \sin \theta$, производная чётной функции является нечётной и наоборот, и нечётные функции в нуле принимают нулевое значение. Из указанного свойства чётности также следует, что различные присоединённые функции Лежандра, обладающие одинаковой чётностью, на рассматриваемом отрезке $[0, 1]$ ортогональны.

Общее решение для потенциала в области II представимо в следующем виде:

$$U = \frac{A_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} w_{2k}(r) \sum_{l=0}^k P_{2k}^{(2l)}(\cos \theta) \{A_{kl} \cos 2l\varphi + B_{kl} \sin 2l\varphi\} + \sum_{k=1}^{\infty} w_{2k-1}(r) \sum_{l=1}^k P_{2k-1}^{(2l-1)}(\cos \theta) \{C_{kl} \cos[(2l-1)\varphi] + D_{kl} \sin[(2l-1)\varphi]\}, \quad (7)$$

где общие для гармоник одной мультипольности множители

$$w_{2k}(r) = -\frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{(2k+1)r^{4k+1} + 2kR_L^{4k+1}}{2k(2k+1)r^{2k+1}}, \quad (8)$$

$$w_{2k-1}(r) = -\frac{R_s^{2k+1}}{R_L^{4k-1} - R_s^{4k-1}} \frac{2kr^{4k-1} + (2k-1)R_L^{4k-1}}{2k(2k-1)r^{2k}}. \quad (9)$$

В формуле для U появляется монополярная составляющая, знак коэффициента перед которой изменяется при переходе через границу между областью II и областью, симметричной ей относительно плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, что обеспечивает равенство нулю дивергенции \mathbf{V} . Входящие в формулу коэффициенты вычисляются из условия на внутренней полусфере, даваемого решением задачи в области I. Коэффициент A_0 перед монополярной составляющей определяется потоком магнитного поля через полусферические поверхности:

$$A_0 = -\frac{R_s^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (10)$$

Решение в области III находится из условия равенства потоков на внешней и внутренней полусферах области II. В поле в области III могут вносить вклад только гармоники с нечётным n и $m = 0$.

В **третьей главе** даётся описание нулевых точек потенциального магнитного поля для двух- и трёхмерного случаев. Дан обзор сведений о

нулевых точках на плоскости на основе представления через однородные гармонические полиномы. Обсуждаются вопросы описания нулевых точек в трёхмерном пространстве и доказаны утверждения, позволяющие упростить его за счёт подходящего выбора системы координат. Предложены базисные функции, линейная комбинация $2p$ из которых даёт потенциал вблизи нулевой точки произвольного порядка p . Дан их список для низших порядков. На основе обзора литературы охарактеризованы нулевые точки 1-го порядка в пространстве. Дается описание нулевых точек 2-го порядка с привлечением ряда частных примеров, а также представлены аналитические результаты общего характера. Рассмотрены бифуркации нулевых точек, в том числе в приложении к модели топологического триггера.

Нулевые точки могут быть классифицированы в первую очередь по их порядку. Для удобства рассмотрения поместим начало системы координат в такую точку. В её окрестности i -ю компоненту вектора магнитного поля можно разложить в ряд Тейлора в виде:

$$B_i = \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_j + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_j x_k + \dots, \quad (11)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, обозначено $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, а по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. Нулём 1-го порядка будем называть такую нулевую точку, в окрестности которой по крайней мере один из членов разложения (11) по крайней мере одной из компонент вектора поля не равен нулю. Если же все члены разложения первого порядка равны нулю, но ненулевым является какой-либо из членов разложения второго порядка по крайней мере одной из компонент поля, то назовём такой нуль нулём 2-го порядка, и т. д.

В диссертации описаны методы, позволяющие упростить задачу рассмотрения нулей 2-го и более высоких порядков потенциального магнитного поля. Упрощение достигается за счёт поворота и масштабирования системы координат и использования в качестве базиса разложения потенциала специальным образом выбранной системы функций. Дальнейший анализ состоит в нахождении таких направлений (исходящих из нуля лучей), на которых перпендикулярная им

составляющая поля обращается в нуль, и в исследовании поведения линий поля вблизи них.

Поместим начало координат в нулевую точку и разложим потенциал вблизи неё в ряд:

$$U = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j x_k + \dots \quad (12)$$

В дальнейшем будем учитывать лишь низший порядок в разложении (12). Если он равен n , то имеется нуль порядка $p = n - 1$.

Вблизи нуля порядка p компоненты вектора поля можно представить в виде

$$B_i = \frac{1}{p!} T_{ij_1 \dots j_p} R_{j_1} \dots R_{j_p}, \quad (13)$$

где тензор постоянных коэффициентов

$$T_{ij_1 \dots j_p} = \frac{\partial^{p+1} U}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} \quad (14)$$

полностью симметричен, а его свёртка по любым двум индексам равна нулю.

Составить представление о поведении линий поля вблизи нулевой точки можно, найдя лучи, направленные по собственным векторам, определяемым уравнением

$$B_i = \lambda |\mathbf{R}|^{p-1} R_i, \quad (15)$$

где B_i задаётся формулой (13). На этих лучах поле направлено вдоль радиуса-вектора или же (если $\lambda = 0$) обращается в нуль. Будем далее называть эти лучи реперами (англ. reference rays). При задании потенциала будем использовать в качестве базисных функций однородные гармонические полиномы, являющиеся записями перенормированных шаровых функций в декартовой системе координат.

Утверждение: В случае поля, заданного линейной комбинацией базисных функций произвольного, но одного порядка, всегда существует как минимум одна проходящая через нулевую точку прямая, на которой поле радиально или же обращается в нуль (т. е. два дополняющих друг друга до прямой репера).

Таблица 1
Базисные функции для потенциалов 3-го порядка.

Функция	Выражение в декартовой системе координат	Запись через шаровые функции
V_3^0	$\frac{1}{6} [2z^3 - 3z(x^2 + y^2)]$	$\frac{r^3}{3} P_3^{(0)}(\cos \theta)$
$V_3^{1,1}$	$z \frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \cos 2\varphi$
$V_3^{1,2}$	xyz	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi$
$V_3^{2,1}$	$\frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2)$	$\frac{r^3}{90} P_3^{(3)}(\cos \theta) \cos 3\varphi$
$V_3^{2,2}$	$\frac{1}{6} (3x^2y - y^3)$	$\frac{r^3}{90} P_3^{(3)}(\cos \theta) \sin 3\varphi$

Доказательство следует из т. н. «теоремы о причёсывании ежа».

Выберем ось Oz вдоль указанного направления. Из условия $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=y=0} = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{x=y=0} = 0$ следует, что вклад шаровых функций (их две), содержащих (в записи в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$) в качестве сомножителей присоединённые функции Лежандра $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ с $m = 1$, обращается в нуль. Поворотом системы координат можно добиться обнуления вклада ещё какой-либо одной из шаровых функций с $m \geq 2$. В завершение можно выбрать масштаб.

Таким образом, для описания нулевой точки порядка p наиболее общего вида достаточно рассмотреть $2p$ базисных функций с $2p - 1$ постоянными коэффициентами. Заметим, однако, что этим не гарантируется единственности способа задания потенциала.

Функции, соответствующие $m = 0$ (зональные гармоники), обозначим через V_n^0 , где n — порядок, а остальные — через $V_n^{i,j}$, где $i = m - 1$ назовем родом, а $j = 1$, если в соответствующую шаровую функцию в качестве сомножителя входит косинус, и $j = 2$, если синус. Список базисных функций, линейные комбинации которых задают нулевые точки 2-го порядка, приведён в табл. 1. Далее предполагается, что система координат повернута так, что коэффициент при $V_3^{1,1}$ равен нулю.

В диссертации используются обозначения γ_- и Σ_- , если линии поля входят в нулевую точку, и γ_+ и Σ_+ , если они выходят из неё (полагается, что в нуле γ -линия заканчивается, а не проходит сквозь него, что отличается от определения, обычно принятого для нулевых точек 1-го

порядка). У нуля 1-го порядка общего вида имеются Σ_{\pm} -поверхность и две перпендикулярные ей γ_{\mp} -линии. Последние в совокупности также принято называть «шипом» (англ. spine) [11]. «Шип» при удалении от нуля служит асимптотой окрестных линий поля. В проекции на перпендикулярную ему плоскость линии поля образуют «узел». По аналогии в диссертации в общем случае «шипом» названы два дополняющих друг друга до прямой репера, названные в свою очередь «полушипами», обладающие тем же асимптотическим свойством. Показано, что у нулевых точек 2-го и высших порядков возможны γ -линии, не являющиеся «полушипами», и «полушипы», не являющиеся γ -линиями.

Зональные гармоники задают нули с «шипом» по оси Oz и с Σ -поверхностями в количестве p , образованными континуумом реперов. У нулей чётного порядка Σ -поверхности — конусы, у нечётного — плоскость xOy и (при $p > 1$) конусы. Для остальных гармоник ось Oz является нулевой прямой порядка i [13]. В случае секториальных гармоник (для которых $i = n - 1$) имеется трансляционная симметрия вдоль этой прямой и в плоскостях, ей перпендикулярных, лежат нулевые точки с $2n$ асимптотами (в случае 1-го порядка это точки типа «седло»). Асимптоты (чередующиеся γ_+ и γ_-) разделены одинаковыми углами. Картина линий поля симметрична относительно асимптот. Остальные, тессеральные, гармоники пропорциональны произведению секториальной гармоники порядка m и аксиально-симметричного множителя, а именно выражению $r^m \sin^m \theta \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \cdot r^{n-m} \frac{d^m}{d \cos^m \theta} P_n(\cos \theta)$. Отсюда следует существование для суммы гармоник одного рода $2m$ полуплоскостей, которые содержат ось Oz и которые линии поля не покидают, причём данное свойство сохраняется и при добавлении потенциала V_n^0 .

При дальнейшем рассмотрении используется следующий набор базисных функций: $V_3^0, V_3^{1,2}, \tilde{V}_3^{2,j} = \sqrt{2}V_3^{2,j}$ ($j = 1, 2$). Нормировка выбрана так, чтобы выполнялись следующие отношения эквивалентности (идентичность системы линий поля с точностью до поворота в

пространстве):

$$\begin{aligned} V_3^0 + V_3^{1,j} &\propto \sqrt{2}\tilde{V}_3^{2,k}, \\ V_3^0 + \tilde{V}_3^{2,j} &\propto \sqrt{3}V_3^{1,k}, \\ V_3^0 + 2V_3^{1,2} + \tilde{V}_3^{2,1} + \tilde{V}_3^{2,2} &\propto \sqrt{5}V_3^0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $j, k = 1, 2$.

Линии полей, потенциалы которых заданы базисными функциями, интегрируются аналитически. Так, при потенциале V_3^0 линии поля описываются уравнением $z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{C}{\rho^2}}$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, C — константа интегрирования; Σ_{\mp} -поверхности задаются $C = 0$. Положительная и отрицательная полуоси оси Oz — γ_{\pm} -линии. Функция $V_3^{1,2}$ задаёт точку, находящуюся на пересечении трёх взаимно перпендикулярных нулевых прямых 1-го порядка, совпадающих с осями координат, и имеющую 8 «полушипов» $|x| = |y| = |z|$.

Для парных линейных комбинаций базисных функций в диссертации получены аналитические уравнения реперных прямых. Данные о числе реперов в этих случаях приведены в табл. 2.

В общем случае, если коэффициент при V_3^0 не обращается в нуль, задача сводится к рассмотрению линий поля, заданных вблизи нулевой точки потенциалом

$$U = V_3^0 + KV_3^{1,2} + F\tilde{V}_3^{2,1} + G\tilde{V}_3^{2,2}, \quad (17)$$

где K, F и G — числовые параметры. Уравнение (15) при этом приобретает вид

$$\begin{pmatrix} -xz + Kyz + F\frac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}Gxy \\ -yz + Kxz - \sqrt{2}Fxy + G\frac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) + Kxy \end{pmatrix} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из условия $[\mathbf{B}, \mathbf{R}] = 0$ находится, что реперными помимо оси Oz будут являться прямые, на которых

$$\begin{cases} y = ux, \\ z = vx, \end{cases} \quad (19)$$

Таблица 2
Количество реперов.

Параметр	Число реперов	
	ненулевых	нулевых
$U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$		
$K = 0$	∞	—
$0 < K < 1$	10	—
$ K = 1$	6	2
$1 < K \leq 2$	6	4
$ K > 2$	10	4
$U_{II} = V_3^0 + K(V_3^{2,1} + V_3^{2,2})$		
$K = 0$	∞	—
$0 < K < 1$	14	—
$ K = 1$	8	6
$ K > 1$	14	—
$U_{III} = V_3^{1,2} + KV_3^{2,1}, U_{IV} = V_3^{1,2} + KV_3^{2,2}$		
$K = 0$	8	6
$0 < K < \sqrt{\frac{2}{3}}$	10	4
$ K \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$	6	4

где значения u представляют собой корни полиномиального уравнения

$$\begin{aligned}
 f(u) = & (2F^2 + KFG - K^2)u^6 + \dots \\
 & + (KF^2 - 3KG^2 - 12FG + 2K^3)u^5 + \dots \\
 & + (18G^2 - 12F^2 - 5KFG + K^2)u^4 + \dots \\
 & + 2(20FG - KF^2 - KG^2 - 2K^3)u^3 + \dots \\
 & + (18F^2 - 12G^2 - 5KFG + K^2)u^2 + \dots \\
 & + (KG^2 - 3KF^2 - 12FG + 2K^3)u + \dots \\
 & + 2G^2 + KFG - K^2 = 0, \quad (20)
 \end{aligned}$$

а значения v вычисляются соответственно по формуле

$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}K(1 - u^2)}. \quad (21)$$

Таким образом, система (19) может давать в качестве решений в совокупности с реперами оси Oz до 14 реперов (ср. с табл. 2).

Исключительными являются наборы значений параметров $KFG > 0$, $|K| = 2$, $|F| = |G| = 1$, при которых функция $f(u)$ в (20) тождественно обращается в нуль. Система линий поля вблизи нулевой точки при этом с точностью до поворота и масштабного фактора совпадает с системой, задаваемой V_3^0 .

Если коэффициент при V_3^0 равен нулю, то потенциал в приведённой форме записывается как

$$U = V_3^{1,2} + F\tilde{V}_3^{2,1} + G\tilde{V}_3^{2,2}. \quad (22)$$

Реперные прямые находятся, как и в предыдущем случае, по формулам (19), где u — решения уравнения

$$\begin{aligned}
 g(u) = & FGu^6 + (F^2 - 3G^2 + 2)u^5 - \dots \\
 & - 5FGu^4 - 2(G^2 + F^2 + 2)u^3 - \dots \\
 & - 5FGu^2 + (G^2 - 3F^2 + 2)u + FG = 0, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}(1 - u^2)}. \quad (24)$$

Потенциал вблизи произвольной нулевой точки 2-го порядка может быть приведён к виду (17), (22), случаям I–IV или базисным функциям поворотом, масштабированием и, если необходимо, изменением знака перед всем выражением.

У наиболее типичной (невырожденной) нулевой точки 1-го порядка имеются шесть ненулевых реперов, составляющих три взаимно перпендикулярные прямые [11]. У наиболее типичной нулевой точки 2-го порядка имеется до 14 реперов, которые являются ненулевыми и могут иметь различное взаимное расположение в пространстве. Наличие нулевых прямых (возможны одна у нуля 1-го порядка и до трёх у 2-го) означает вырождение. В этих случаях возникает необходимость учёта вдоль соответствующих прямых членов разложения (11) более высокого порядка. Возможно также чисто геометрическое вырождение (как при возникновении аксиальной симметрии). Иерархию вырожденности нулевых точек можно строить с учётом значимости лишь нелинейности более

высокого порядка, либо принимая к тому же во внимание появление дополнительных симметрий.

В целом последовательность действий при изучении поведения линий поля вблизи нулевой точки 2-го или более высокого порядка может быть следующей:

1. Нахождение ненулевых и нулевых (если таковые имеются) реперов, аналитически или численно. В случае нечётных степеней нуля магнитного поля также существенны знаки соответствующих собственных значений $\text{sign}(\lambda)$. Для чётных степеней эти знаки различны на дополняющих друг друга полупрямых. Для положительной полуоси оси Oz при потенциале V_3^0 согласно принятой нормировке $\lambda = 1$.
2. Нахождение «полушипов» — реперов, для которых точка пересечения их с поверхностью сферы с центром в нулевой точке является особой точкой типа «узел».
3. Нахождение реперов, для которых указанная точка пересечения является особой точкой типа «седло». Такие реперы могут быть как γ -линиями, так и направляющими некоторой Σ -поверхности. Возможен также переходный вариант между «седлом» и «узлом», например ось Oz при потенциале U_I (см. табл. 2) и $K = 2$.

В **четвёртой главе** даётся описание поведения линий магнитного поля вблизи ряда систем, составленных из круговых токовых витков. Проведено исследование их поведения вблизи системы из двух сцепленных круговых витков, лежащих в перпендикулярных плоскостях (рис. 2а). На больших расстояниях магнитное поле этой системы с высокой степенью точности эквивалентно дипольному, а силовые линии навиваются на топологически эквивалентные торами поверхности, охватывающие её как единое целое. На малых расстояниях происходит приближённая намотка линий на деформированные тороиды, охватывающие каждый из витков по отдельности (рис. 2б). Промежуток между этими областями упорядоченности занимает область стохастичности, включающая «магнитные острова», что ранее отчасти указывалось в [16].

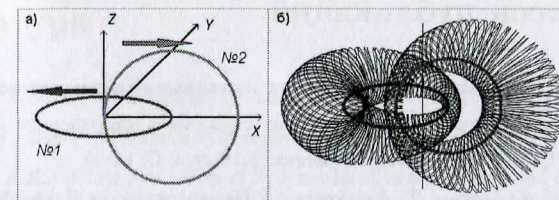


Рис. 2. а) Система токовых витков. Виток №1 с центром в начале координат располагается в плоскости xOy , виток №2 с центром в точке $x = 1, y = z = 0$ — в плоскости xOz . Радиус витков единичный. Токи одинаковы по силе, их направления показаны стрелками. б) Деформированные тороиды, образуемые линиями поля вблизи витков. Отмечено положение оси суммарного диполя.

Замкнутые линии поля вблизи каждого из витков можно описать условными формулами $(m:n, m:m)$ для линий, охватывающих виток №1, и $(m:m, m:n)$ для охватывающих виток №2, где в скобках указаны соотношения чисел обхода вокруг каждого из витков в тороидальном и полоидальном направлениях. Помимо них существует подсистема линий, которые одинаковое число раз охватывают каждый из витков, т.е. ведут себя по отношению к обоим виткам как к единому целому, и описываются формулой $(m:n, m:n)$. Также существуют замкнутые линии с более сложным поведением, которые перечисленным формулам не удовлетворяют. Непосредственно вблизи упомянутых деформированных тороидов находятся магнитные «острова», охватывающие линию (1:1, 1:8) у витка №2, а также аналогичную линию у витка №1. Наиболее крупные «острова» расположены в окрестности замкнутой линии (1:4, 1:4). Также магнитные «острова» наблюдаются около относящейся к числу линий со сложным поведением линии (2:6, 2:5) и аналогичной ей.

Описаны расчёты магнитного поля вблизи системы катушек с током, разработанной в Институте лазерной физики СО РАН с целью моделирования магнитного поля сверхпроводящего магнита спектрометра AMS-02.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты работы.

Список публикаций

- A.1. Лукашенко А.Т. Об описании потенциального векторного поля без источников вблизи нулевых точек высших порядков в пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, математика, механика. 2016. № 4. С. 18–22.
- A.2. Lukashenko A.T., Veselovsky I.S. General principles of describing second- and higher-order null points of a potential magnetic field in 3D // Geomagnetism and Aeronomy. 2015. V. 55. № 8. P. 1152–1158.
- A.3. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. Статистика изолированных и сложных геомагнитных бурь по материалам базы данных «АРЕВ» за 23-й цикл солнечной активности // Геомагнетизм и аэронамия. 2013. Т. 53. № 5. С. 635–644.
- A.4. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. Модель магнитного поля во внутренней гелиосфере с учётом выравнивания радиальной напряжённости в короне Солнца // Астрономический вестник. 2012. Т. 46. № 2. С. 162–172.
- A.5. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. Хаотическое поведение линий магнитного поля вблизи простейших токовых систем // Тр. XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015». СПб, 2015. С. 55–58.
- A.6. Лукашенко А.Т., Веселовский И.С. О принципах описания нулевых точек высших порядков магнитного поля в пространстве // Тр. XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика-2015». СПб, 2015. С. 261–264.
- A.7. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. О переменном знаке потоков энергии и вещества вблизи Солнца // Тр. XVIII Всероссийской ежегодной конференции с международным участием «Солнечная и солнечно-земная физика-2014». СПб, 2014. С. 83–86.
- A.8. Лукашенко А.Т., Веселовский И.С. О геометрии потенциального магнитного поля в окрестностях нулевых точек 2-го и высших порядков // Тр. XVIII Всероссийской ежегодной конференции с международным участием «Солнечная и солнечно-земная физика-2014». СПб, 2014. С. 263–266.
- A.9. Zakharov Yu.P., Antonov V.M., Boyarintsev E.L., Vchikov K.V., Melekhov A.V., Posukh V.G., Shaikhislamov I.F., Ponomarenko A.G., Veselovsky I.S., Lukashenko A.T. On the interaction effects of ionospheric plasma with dipole magnetic field of the spectrometer AMS-02 moving onboard of International Space Station // 2009 International Conference on Space Science and Communication (IconSpace 2009), 2009. P. 96–101.

Литература

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 616 с.
2. Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 592 с.
3. Schatten K.H., Wilcox J.M., Ness N.F. A model of interplanetary and coronal magnetic fields // Solar Phys. 1969. V. 6. № 3. P. 442–455.
4. Altschuler M.D., Newkirk G.Jr. Magnetic fields and the structure of the solar corona. I: methods of calculating coronal fields // Solar Phys. 1969. V. 9. № 1. P. 131–149.
5. Gleeson L.J., Axford W.I. An analytic model illustrating the effects of rotation on a magnetosphere containing low-energy plasma // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. № 19. P. 3403–3406.
6. Alexeev I.I., Belenkaya E.S. Modeling of the Jovian magnetosphere // Ann. Geophys. 2005. V. 23. P. 809–826.
7. Smith E.J., Balogh A. Ulysses observations of the radial magnetic field // Geophys. Res. Lett. 1995. V. 22. № 23. P. 3317–3320.
8. Longcope D.W. Topological methods for the analysis of solar magnetic fields // Living Rev. Solar Phys., 2005. V. 2, 7. Cited: 08.05.2014, <http://www.livingreviews.org/lrsp-2005-7>
9. Горбачёв В.С., Кельнер С.Р., Сомов Б.В., Шварц А.С. Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек // Астрономический журнал. 1988. Т. 65. № 3. С. 601–612.
10. Cowley S.W.H. A qualitative study of the reconnection between the Earth's magnetic field and an interplanetary field of arbitrary orientation // Radio Science. 1973. V. 8. № 11. P. 903–913.
11. Parnell C.E., Smith J.M., Neukirch T., Priest E.R. The structure of three-dimensional magnetic neutral points // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 3. P. 759–770.
12. Морозов А.И., Соловьёв Л.С. Геометрия магнитного поля // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3.
13. Жугенда Ю.Д. Нейтральные (нулевые) точки магнитных полей // Геомагнетизм и аэронамия. 1966. Т. 6. № 3. С. 506–511.
14. Костомаров Д.П., Ечкина Е.Ю., Иновенков И.Н., Буланов С.В. Моделирование магнитного пересоединения в трёхмерной геометрии // Мат. моделирование. 2009. Т. 21. № 11. С. 3–15.

15. *Ильгисонис В.И.* Классические задачи физики горячей плазмы: курс лекций // Высшая школа физики / Под ред. В.П. Смирнова и др., вып. 8. М.: Издательский дом МЭИ, 2015. 326 с.
16. *Hosoda M., Miyaguchi T., Imagawa K., Nakamura K.* Ubiquity of chaotic magnetic-field lines generated by three-dimensionally crossed wires in modern electric circuits // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. 067202.
17. *Aguirre J., Peralta-Salas D.* Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires // EPL. 2007. V. 80. 60007.
18. *Ram A.K., Dasgupta B.* Dynamics of charged particles in spatially chaotic magnetic fields // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. 122104.
19. *Lieberherr M.* The magnetic field lines of a helical coil are not simple loops // Am. J. Phys. 2010. V. 78. № 11. P. 1117–1119.
20. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 7-е изд. М.: Изд-во МГУ, Наука, 2004. 798 с.

Подписано в печать: 15.12.2016
Тираж: 100 экз. Заказ №23
Отпечатано в типографии «Реглет»
125009, г. Москва, Страстной бульвар, д. 4
+7 (495) 978-43-34; www.reglet.ru