

**Московский Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова**

НИИ Ядерной Физики имени Д.В.Скобельцына

С.Г.Басиладзе

**Физические особенности сложения и разложения
сигналов и их информационные следствия**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006-2/801

Москва 2006

УДК 519.72 + 539.12

S.G.Basiladze

E-mail address: basilad@monet.npi.msu.ru

“Physical features of signals addition and decomposition
and their information consequences”

Preprint NPI MSU – 2006-2/801

Abstract:

In the present work classification of variants of an interference is resulted and conditions are analyzed, at which addition of signals probably without rejection or a addition of energy from the outside. It is shown, that at decomposition of signals there is no equality of density of energy and balance of energy is carried out only on final intervals.

On the basis of the analysis of threshold and limiting density of energy the estimation of information throughput of electromagnetic signals in space is carried out.

С.Г.Басиладзе

“ Физические особенности сложения и разложения сигналов и их
информационные следствия”

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006-2/801

Аннотация:

В настоящей работе приводится классификация вариантов интерференции и анализируются условия, при которых сложение сигналов возможно без отвода или подвода энергии извне. Показано, что при разложении сигналов отсутствует равенство плотностей энергии и баланс энергии осуществляется только на конечных интервалах.

На основе анализа пороговых и предельных плотностей энергии проведена оценка информационной пропускной способности электромагнитных сигналов в пространстве.

© НИИ Ядерной Физики им.Д.В.Скобельцина МГУ, 2006.

© Басиладзе С.Г.

Введение

Сигнал в абстрактных математических переменных может быть описан функцией $y(x)$, либо представлен как непрерывная сумма гармоник $g(\chi)$, здесь χ - абстрактная спектральная переменная, обратная линейной переменной “ x ” (например, во времени это частота). Приращение энергии сигнала может быть записано для “ χ ” таким же образом, что и для “ x ”:

$$dE = y^2(x) * dx, \quad (1,а)$$

$$dE = [g^2(\chi)/2] * d\chi; \quad (1,б)$$

где $y^2(x)$ и $g^2(\chi)$ есть линейная и спектральная плотности энергии, соответственно.

Энергия любого реального (существующего в природе) сигнала должна быть ограничена. Это накладывает два ограничения на вид его спектра:

- в области нижних гармоник спектральная плотность амплитуды - $g(\chi)$ не должна уходить в бесконечность;
- “основная” ширина полосы гармоник (несущая основную энергию) должна быть ограничена, т.е. спектральная плотность амплитуды выше основной полосы (по χ) должна понижаться с темпом не слабее $1/\chi$;

Ограниченность ширины спектра - $\Delta\chi$ неизбежно влечет за собой “инерционность” сигнала - ограничивает возможный интервал его изменения на уровне: $\delta x = 1/2\Delta\chi$; это следует из теоремы отсчетов [1]. В частном случае сигнал может состоять из одной гармоники, но и тогда его быстрота ограничивается тем же соотношением.

Если имеются два сигнала – $y_1(x)$ и $y_2(x)$, перекрывающихся на достаточно малом интервале Δx , то можно считать, что на Δx они меняются слабо, т.е. $y_1 \approx \text{const}$ и $y_2 \approx \text{const}$. При этом суммарная энергия на интервале перекрытия есть:

$$E_{1+2} = (y_1 + y_2)^2 * \Delta x = (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 * y_2) * \Delta x = E_1 + E_2 + 2y_1 * y_2 * \Delta x, \quad (2)$$

где E_1 и E_2 – энергия каждого из сигналов на интервале Δx .

В зависимости от сочетания знаков y_1 и y_2 (полярности сигналов на Δx) суммарная энергия может быть больше, равна, или меньше суммы $E_1 + E_2$. Например, для двух синусоидальных (гармонических) сигналов с темпом колебаний χ_1 и χ_2 , если $\chi_1 \neq \chi_2$, то интеграл от перекрестного члена $2y_1 * y_2 * \Delta x$ (2) равен нулю:

$$E_{1*2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha_1 * x) * \sin(\alpha_2 * x) * dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \cos[(\alpha_1 - \alpha_2)x] - \cos[(\alpha_1 + \alpha_2)x] \} * dx = 0 - 0, \quad (3)$$

здесь $\alpha = 2\pi\chi$ - “круговая” спектральная переменная.

В этом случае $E_{1+2} = E_1 + E_2$. Этот факт является основой Фурье-анализа, т.к. из него следует *ортogonalность* гармонических функция разложения. Именно поэтому, приращение энергии сигнала может быть записано для “ χ ” в той же форме, что и для “ x ” (1); разница в одну вторую в (1,б) появляется из-за синусоидальной формы гармоник.

При равных χ_1 и χ_2 энергия перекрестного члена принимает ненулевое значение, поскольку $\cos[(\alpha_1 - \alpha_2)x]$ в (3) обращается в единицу. Это означает, что сумма двух гармоник с $\alpha_1 = \alpha_2$ на любом достаточно большом интервале Δx имеет энергию большую, чем сумма энергий отдельных гармоник. Это же должно происходить и при суммировании двух однополярных сигналов (2).

Вопрос равенства плотностей энергии (1) и равенства энергий (2) особенно важен когда сложение или разложение сигналов происходит *в отсутствие* источников или рассеивателей энергии (при отсутствии обмена энергии с внешним миром). Этот вопрос и является основным, обсуждаемым в данной работе.

Проблема несоответствия плотностей энергии порождается математически тем, что квадрат суммы не равен сумме квадратов (2) или, говоря по другому (извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства), алгебраическая сумма не равна геометрической. Природа, однако, склонна уравнивать эти суммы. Физики впервые столкнулись с этим в опыте Майкельсона, когда обнаружилось, что время прохода прямого и отраженного сигнала в продольном направлении - по направлению движения (арифметическая сумма длин) и время прохода прямого и отраженного сигнала в поперечном направлении (геометрическая сумма длин) совпадают. Результатом, как известно, было появление теории относительности.

Поэтому анализ случаев, где появляется подобная задача, представляется совсем не праздным. Как будет показано, из него, например, вытекают интересные следствия в отношении информационной плотности сигналов.

Интерференция (сложение) сигналов

Принудительная и свободная интерференция. Сказанное выше означает, что существует большой класс практически важных сигналов, которые не могут накладываться друг на друга – без подвода или отвода энергии извне. Мы будем называть такие сигналы *принудительно интерферирующими*, в отличие от *свободно интерферирующих* сигналов (например, гармонических с $\chi_1 \neq \chi_2$), суммарная энергия которых не меняется при сложении огибающих.

Для принудительно интерферирующих сигналов в реальном физическом мире их перекрытие означает появление сил притяжения или отталкивания. Хорошим примером является взаимодействие электрических полей положительных и/или отрицательных зарядов. Когда (в одномерном пространстве) имеется наложение двух гармонических сигналов *одной частоты*, то они *не в состоянии* интерферировать, если нет отвода или подвода энергии извне.

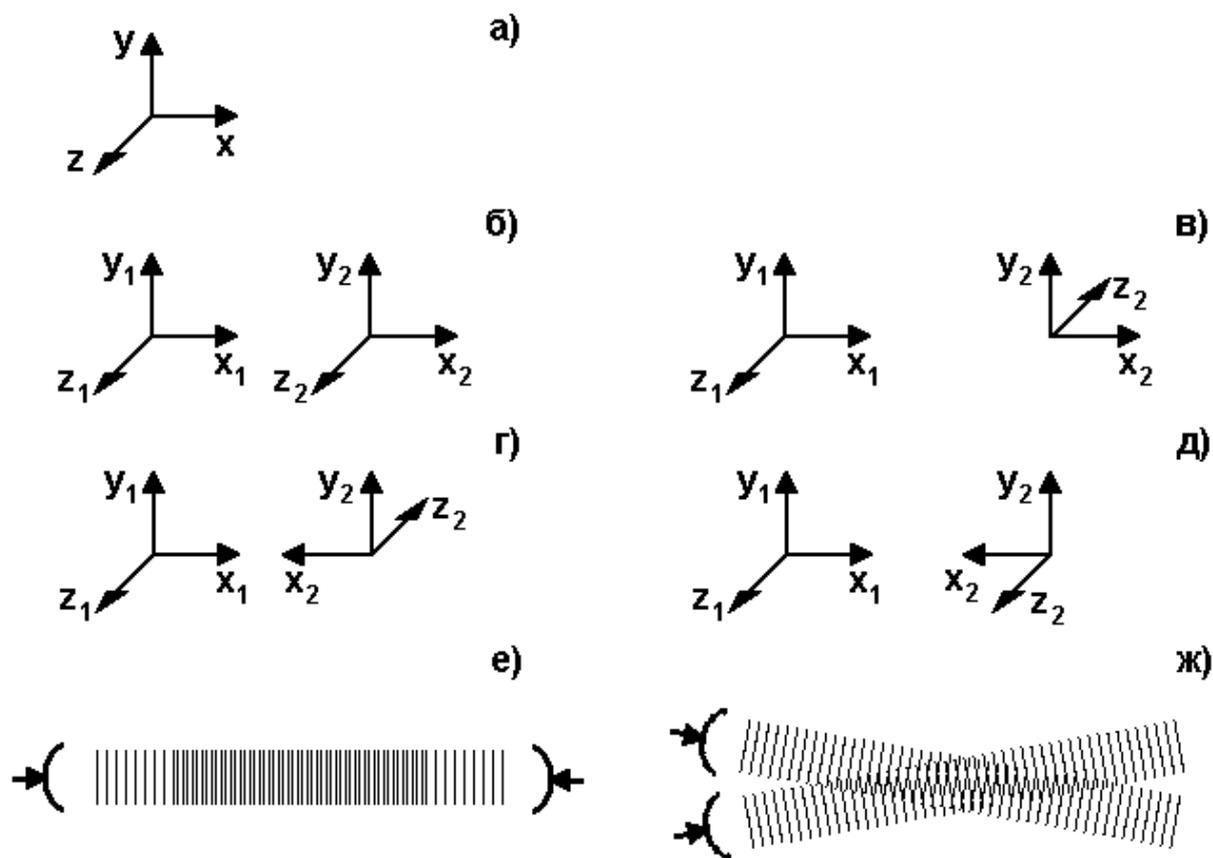


Рис.1. Двухкомпонентный сигнал - а) и варианты их сочетаний:

- б) - попутные “правые” сигналы,
- в) - попутные “правый” и “левый” сигналы,
- г) - встречные “правые” сигналы,
- д) - встречные “правый” и “левый” сигналы;
- е) - встречные гармонические радиосигналы (плоские волны) в пространстве;
- ж) - пересечение гармонических радиосигналов в двух измерениях; сигналы являются попутными по горизонтали, но встречными по вертикали, за счет последнего плоский профиль исходного излучения становится синусоидальным в зоне пересечения. Излучатели в показанный момент считаются выключенными, размытие гармоник по χ незначительно, поскольку цуг колебаний достаточно длинный; дифракционное расширение профиля излучения вдоль цуга также невелико $\sim 15\%$ на 100 периодов (для приведенной ширины профиля).

Попробуем показать каким образом природа все же “находит пути” уравнивания линейной плотности энергии при интерференции гармонических ($\chi_1=\chi_2$) или однополярных сигналов.

Двухкомпонентные сигналы

Перекрестный член $2y_1*y_2*\Delta x$ в (2) не может отсутствовать, но он может быть точно скомпенсирован равным ему членом обратной полярности. Для этого сигнал должен быть не однокомпонентным, а *двухкомпонентным*:

$$y = f_Y(x), \quad (4,а)$$

$$z = f_Z(x); \quad (4,б)$$

причем при сложении двух сигналов должно выполняться условие “обратных знаков” (перекрестных членов):

$$E_{1,2}^y = E_1^y + E_2^y + 2y_1*y_2*\Delta x, \quad (5,а)$$

$$E_{1,2}^z = E_1^z + E_2^z - 2z_1*z_2*\Delta x, \quad (5,б)$$

что при наличии дополнительного условия “равенства компонентов”

$$y_1 = z_1 \text{ и } y_2 = z_2, \text{ или } y(x) = z(x), \quad (6)$$

дает:

$$E_{1,2} = E_1^y + E_2^y + E_1^z + E_2^z. \quad (7)$$

Записанное в виде формул означает, что свободно интерферирующий сигнал должен иметь два компонента, одинаковых по величине, но знак у произведений y_1*y_2 и z_1*z_2 должен быть разным. Если равнокомпонентный сигнал нетрудно себе представить (в реальных физических сигналах принцип равного распределения энергии по степеням свободы является одним из основополагающих), то условие противоположности знаков нуждается в некотором пояснении.

Встречные и попутные, правые и левые сигналы. Поскольку мы рассматриваем сигналы в *абстрактных* математических переменных x, y, z , то для большей наглядности можно ввести векторные оси полярности, перпендикулярные друг другу – рис.1,а [2]. Если оси “ x ” двух однотипных сигналов сориентированы в одном направлении (как на рис.1,б), то условие (5) заведомо не выполняется, поскольку произведения y_1*y_2 и z_1*z_2 будут иметь один и тот же знак. Для выполнения условий (5,а,б) оси y_1 и y_2 должны оставаться однонаправленными, а оси z_1 и z_2 должны быть направлены в противоположные стороны, как это показано на рис.1,в. Для однотипных сигналов это возможно лишь в том случае, если оси x_1 и x_2 ориентированы *встречно* по отношению друг к другу – рис.1,г. Например, если “ x ” является пространственной координатой, то это будет означать, что суммируемые сигналы движутся навстречу друг другу (в то время как на рис.1,в они движутся *попутно* друг другу).

Попутные сигналы могут иметь противоположные оси z_1 и z_2 , если один из них “правый”, а другой “левый”, как показано на рис.1,в.

Выяснив эти общие закономерности, перейдем к рассмотрению конкретных случаев интерференции сигналов. Тогда вместо абстрактной переменной ‘ x ’ следует использовать координату - r или время - t , а вместо ‘ y ’

- напряжение или ток. Для начала, рассмотрим распространение сигналов во времени вдоль одной координаты.

Интерференция сигналов в кабелях

Простым и наглядным примером свободной интерференции может служить распространение сигналов в кабелях. Идеализированный кабель (с бесконечно широкой полосой пропускания) имеет всего два параметра: ρ - волновое сопротивление и задержку – t_3 на фиксированную длину – Δl .

Короткий импульс (однократная интерференция). При подаче короткого ($t_{И} \ll t_3$) электрического импульса на вход кабеля по нему начинают совместно распространяться импульс напряжения - U и импульс тока – I , причем они связаны между собой соотношением очень похожим на закон Ома: $I=U/\rho$. Через время t_3 , дойдя до конца кабеля, импульс должен отразиться обратно, т.к. в (идеализированном) кабеле нет поглотителей энергии.

Если кабель на выходе разомкнут, то тока в оконечной точке быть не может, поэтому напряжение на выходе кабеля удваивается. Это означает, что рождается отраженная “волна” (здесь - набор гармоник), где вектор напряжения ориентирован так же, как у падающей волны, а вектор тока имеет обратное направление.

Если кабель на выходе замкнут, то напряжения в оконечной точке быть не может, поэтому удваивается ток на выходе кабеля. Это означает, что рождается отраженная волна, где вектор тока, ориентирован так же, как у падающей волны, а вектор напряжения имеет обратное направление. В обоих случаях интерференция падающей и отраженной волн дают суммарную картину тока и напряжения в кабеле.

Хотя волна тока в кабеле является продольной, а на рис.1 Z-компонент поперечен, это не меняет сути процессов, описываемых формулами (4-7): свободно интерферирующий сигнал двухкомпонентен и перекрестные члены в (5,а,б) имеют разные знаки.

Два компонента энергии. Как уже говорилось, соотношение $U/I=\rho$ по форме совпадает с законом Ома для сопротивления: $U/I=R$, здесь R – сопротивление, превращающее упорядоченную энергию импульса напряжения или тока в беспорядочную тепловую энергию. В принципе, кабель бесконечной длины является таким же поглотителем энергии, как и омическое сопротивление. Однако, физический механизм “поглощения” энергии совершенно другой – это отвод (на бесконечность), а не рассеивание энергии (перевод в тепло). Для омического сопротивления из формулы для потребляемой мощности $P_R=U*I$, используя $U/I=R$, можно осуществить переход:

$$P_R = U^2/R, \text{ откуда } P_R = I^2 * R. \quad (8,а,б)$$

Формулы (8,а,б) являются тождественными, поскольку энергия рассеивается только в тепло. Для волнового сопротивления, используя $U/I=\rho$, формально математически можно осуществить тот же переход:

$$P_\rho = U^2/\rho, \text{ откуда } P_\rho = I^2 * \rho, \quad (9,а,б)$$

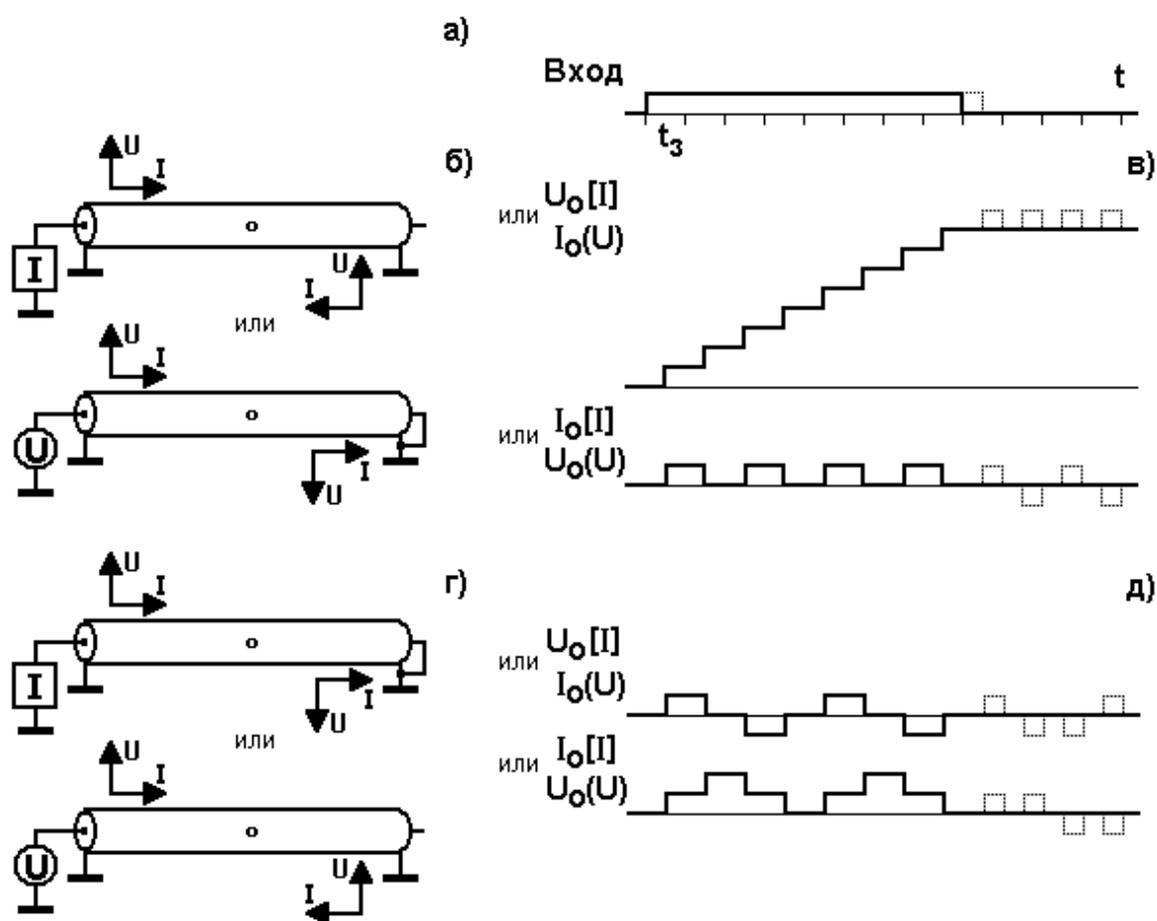


Рис.2 Распространение длинного прямоугольного сигнала по кабелю:

- а) – ток или напряжение на входе кабеля, t_3 - задержка кабеля;
 - б) – симметрично терминированный кабель, подключенный к генератору тока (эквивалент емкости) или к генератору напряжения (эквивалент индуктивности);
 - в) – накопление энергии в виде линейно растущего напряжения (для генератора тока) или линейно растущего тока (для генератора напряжения) и пульсации тока или напряжения (соответственно) для симметрично терминированного кабеля;
 - г) – несимметрично терминированный кабель, подключенный к генератору тока (эквивалент “короткого замыкания”) или к генератору напряжения (эквивалент “холостого хода”);
 - д) – пульсации напряжений и токов в несимметрично терминированном кабеле (энергия не накапливается);
- эпюры напряжений и токов показаны для средней точки кабеля (о); тонкие пунктирные линии даны для сигнала длительностью $8,5t_3$.

что физически будет неверно, т.к. правильная формула имеет вид:

$$P_p = 0,5 * U^2 / \rho + 0,5 * I^2 * \rho, \quad (10)$$

поскольку половина энергии заключена в электрическом поле (U), а вторая половина – в магнитном (I). Для одиночных сигналов формулы (9,а,б) и (10) эквивалентны, но для интерферирующих сигналов формулы (9,а,б) непригодны, поскольку они не отражают двухкомпонентной природы сигнала.

Ступенчатый перепад (многократная интерференция). Описанные выше, хорошо известные правила отражений сигнала от концов кабеля применимы и для вводимого в кабель *ступенчатого перепада* тока или напряжения. Напомним, что генератор тока (I - рис.2,б) является для отраженного сигнала разрывом цепи, а генератор напряжения (U) – коротким замыканием. Эпюры токов и напряжений показаны на рис.2,в и рис.2,д для средней точки кабеля. Нетрудно видеть, что эпюры для генераторов тока и напряжения одинаковы, но антисимметричны: эпюры напряжений для тока соответствуют эпюрам тока для напряжений и наоборот. Вводимые ток или напряжение из-за отражений носят колебательный характер на рис.2,в, но энергия все время возрастает за счет ступенчатого роста (накопления) второго компонента - напряжения или тока, соответственно.

Если отвлечься от ступенек, то картина в целом очень схожа с зарядом емкости C постоянным током или с “разгоном” тока в индуктивности L постоянным напряжением. В первом случае для кабеля: $\Delta U = I * \rho$, а для емкости: $\Delta U = I * t_3 / C$, откуда емкость кабеля:

$$C = t_3 / \rho. \quad (11)$$

Во втором случае для кабеля: $\Delta I = U / \rho$, а для индуктивности: $\Delta I = U * t_3 / L$, откуда индуктивность кабеля:

$$L = t_3 * \rho. \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем:

$$\rho = \sqrt{L / C}, \quad (13,а)$$

$$t_3 = \sqrt{L * C}. \quad (13,б)$$

Линейный рост тока (а ток это движение зарядов) отражает инерционность роста энергии движения, обусловленного фактом существования задержки в кабеле. Для интервалов времени $\Delta t \gg t_3$ становится справедливым дифференциальное уравнение для индуктивности:

$$dI * L = U * dt, \text{ или } dI * (t_3 * \rho) \approx U * dt. \quad (14,а)$$

У него имеется механический аналог, а именно закон Ньютона, записанный в форме:

$$dV * m = F * dt, \quad (14,б)$$

где V - скорость, m - масса тела, а F - сила.

Как видим, произведение $t_3 * \rho = L$ является аналогом механической массы (создает инерционность при условии, что движение носит циклический характер), а электрическое напряжение U есть аналог силы.

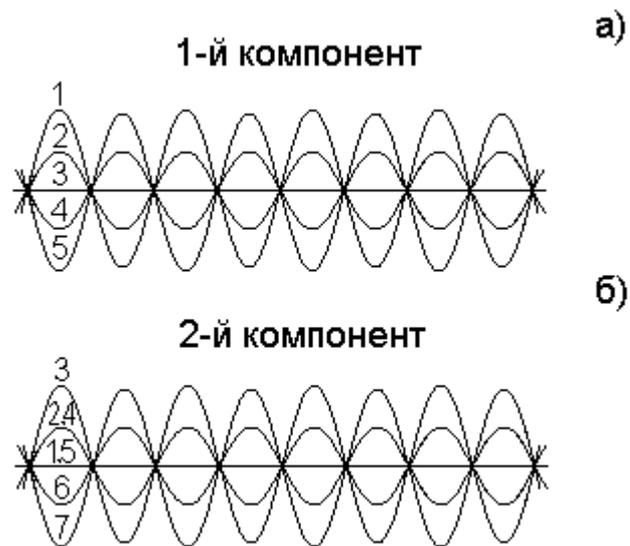


Рис.3 Встречная интерференция (стоячая волна) однокомпонентных – а) и двухкомпонентных – а,б) гармонических сигналов. Первый и второй компонент ортогональны – разница фаз составляет 90^0 . В моменты “1,5,9,...” – второй компонент, а в моменты “3,7,11,...” – первый компонент отсутствуют, но *в каждом* из моментов (1,2,3,...) суммарная энергия сохраняется постоянной.

Длинный импульс (многократная интерференция). Любой прямоугольный импульс есть сумма двух сдвинутых во времени ступенчатых перепадов противоположных знаков, поэтому результирующая эпюра напряжений и токов может быть получена вычитанием из эпюр на рис.2,в и рис.2,д их самих с обратным знаком и задержкой, равной длине импульса $t_{\text{И}}$. Результирующая картина носит упорядоченный характер, когда $t_{\text{И}}$ кратно половинной задержке – $t_3/2$.

Четное терминование. Если $t_{\text{И}}$ равно четному числу $t_3/2$, то ступенчатые колебания компонента накачки прекращаются, а компонент накопления энергии уменьшается на один шаг и затем сохраняется постоянным. Этот случай иллюстрируется рис.2,в.

Нечетное терминование. Если $t_{\text{И}}$ равно нечетному числу $t_3/2$, то ступенчатые колебания компонента накачки продолжают с удвоенной амплитудой; соответственно, у компонента накопления энергии на вершине появляется ступенчатое колебание с единичной амплитудой, как показано на рис.2,д.

Резюмируя эту часть раздела можно отметить следующее. В кабеле бесконечной длины имеется равенство мощности обоих компонентов сигнала. При однократной интерференции (кабель конечной длины и короткий импульс) это равенство нарушается и один из компонентов может на интервале перекрытия обращаться в нуль. При многократной интерференции (длинный импульс) накопление энергии происходит за счет роста амплитуды компонента, противоположного вводимому в кабель.

Гармонический сигнал (однократная интерференция). Для синусоидального сигнала мы рассмотрим только случай однократной интерференции. Она происходит в кабеле конечной длины когда длительность цуга вводимых колебаний равна $2t_3$ или когда по кабелю бесконечной длины распространяются два гармонических сигнала в противоположных направлениях. Тогда образуется стоячая волна – рис.3,а, изображение разных фаз которой заимствовано нами из [3]. Как уже говорилось, приведенная на рис.3,а картина интерференции является неверной для *однокомпонентного* сигнала (поскольку нарушается закон сохранения энергии) и является *неполной* для двухкомпонентного сигнала, поскольку не отображает поведение второго компонента. Стоячая волна для второго компонента показана на рис.3,б. Как видим, в каждой точке по длине кабеля происходит циклическая перекачка энергии одного компонента в энергию другого компонента и обратно. Это то же самое, что происходит в колебательном LC-контуре или в механическом маятнике. Соответственно, существуют моменты времени, когда первый или второй компонент полностью отсутствует (равен нулю) по всей длине кабеля.

Заметим, что формулы (10÷12) справедливы и для гармонического сигнала (поскольку они справедливы для каждой из гармоник прямоугольного сигнала).

Интерференция сигналов в пространстве

Как известно, распространение классических электромагнитных сигналов в пространстве описывается уравнениями Максвелла:

$$\nabla \check{E} = \varepsilon\mu^*(\partial^2 \check{E} / \partial t^2), \quad (15,а)$$

$$\nabla \hat{H} = \varepsilon\mu^*(\partial^2 \hat{H} / \partial t^2), \quad (15,б)$$

где ∇ – оператор Лапласа (сумма вторых производных по трем пространственным координатам),

\check{E} , \hat{H} – напряженности электрического и магнитного поля,

$\varepsilon = 1,11 \cdot 10^{-10} \text{ а}^2 \cdot \text{с}^2 / \text{н} \cdot \text{м}^2$ – “нерационализованные” электрическая и

$\mu = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ н} / \text{м}^2$ – магнитная проницаемость вакуума.

Уравнения (15,а,б) являются волновыми уравнениями и описывают распространение двух синфазных гармонических колебаний векторов \check{E} и \hat{H} [3] перпендикулярно направлению движения и друг другу (случай а) на рис.1). Величина, обратная произведению $\varepsilon\mu$, есть квадрат скорости распространения волны, т.е. квадрат скорости света в вакууме: $c^2 = 1/\varepsilon\mu$.

Как видим, для обеспечения свободного распространения электромагнитных сигналов в пространстве природа “позаботилась” об их *двухкомпонентности*. Формулы (13) здесь имеют вид:

$$\rho_B = 4\pi \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad (16,а)$$

$$t_3 = \Delta r / \sqrt{\mu^* \varepsilon}, \quad (16,б)$$

где Δr – длина пространственного интервала по пути распространения волны.

Заметим, что $\rho_B = 337 \text{ Ом}$; эта величина практически является предельной для волнового сопротивления волноводов (кабелей), поскольку обычно $\varepsilon > 1$, а $\mu \approx 1$.

Встречная интерференция. Если выбрать пространственную ось “ r ” вдоль направления распространения волны, то рассмотренное в разделе “Гармонический сигнал” будет полностью справедливо для интерференции двух встречных электромагнитных волн – рис.1,е. Образуется такая же двухкомпонентная стоячая волна, как и показанная на рис.3.

Сопоставив (13,а,б) и (16,а,б) можно найти погонную емкость и погонную индуктивность вакуума:

$$C_B = t_3 / \rho_B = \Delta r / 4\pi\mu, \quad (17,а)$$

$$L_B = t_3^* \rho_B = \Delta r^* (4\pi/\varepsilon). \quad (17,б)$$

Эти величины не являются формальными, поскольку взаимная перекачка двух видов энергии *действительно происходит*.

“Попутная” интерференция. В линейной (одномерной) структуре, например, в кабеле, попутно идущие сигналы движутся друг за другом и не могут пересечься. В трехмерном пространстве нетрудно представить себе распространение двух гармонических сигналов, движущихся под малыми углами в попутных направлениях – рис.1,ж. Казалось бы, что оба компонента будут складываться, как на рис.1,б, и это должно вести к росту энергии $E_{1,2}$. На

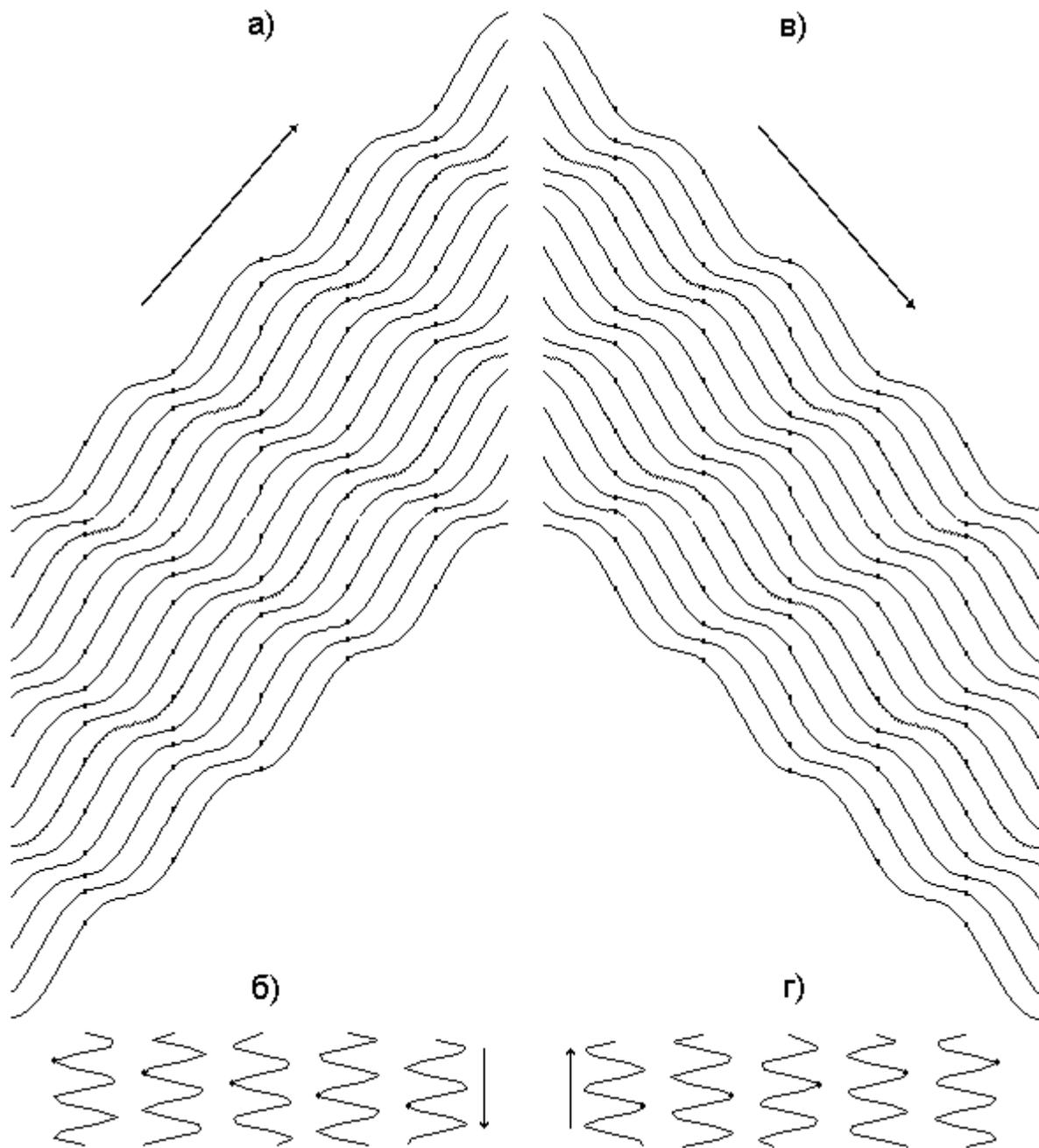


Рис.4. Интерференция гармонических сигналов в пространстве:
 а) – мгновенный вид плоской волны, идущей на рис.1,ж снизу вверх (масштаб по вертикали намеренно увеличен для большей наглядности);
 б) – профиль потока излучения в вертикальном направлении в точках, показанных на фрагменте а), он не плоский, а синусоидальный;
 на фрагментах в) и г) это же показано для волны, идущей на рис.2,ж сверху вниз.

В движении в каждой точке по горизонтальной оси картина профиля смещается – показано противоположными стрелками на б) и г), в результате чего при любом (даже весьма малом угле пересечения) происходит встречная интерференция в вертикальном направлении.

рис.4 в увеличенном масштабе по вертикали показаны обе плоские волны, идущие под малым углом к горизонтали на рис.1,ж. За счет наклона их профиль в вертикальном направлении уже не плоский, а синусоидальный. Поэтому, при пересечении возникает *встречная* интерференция в вертикальном направлении, уравнивающая плотности энергии. Она происходит при любом, в том числе и очень малом угле пересечения (растет только ширина зоны перекрытия и доля интерферирующей энергии).

Резюмируя весь раздел в целом, следует подчеркнуть, что при интерференции соблюдается *равенство плотностей* энергии (мощности) суммарного и суммируемых двухкомпонентных сигналов.

При попутной интерференции, даже если гармонические сигналы однокомпонентны, роль второго уравнивающего энергии “компонента”, играет поперечная координата поскольку при синусоидальной форме огибающей поперечного суммарного профиля энергия определяется *половиной* квадрата амплитуды (1,б). Однако, в этом случае баланс энергий в поперечном направлении соблюдается лишь *в среднем* - с точностью до периода колебаний. Как показано ниже, баланс энергий (а не плотностей энергии) характерен и для дифракции, поскольку разлагаемый сигнал по определению однокомпонентный.

Разложение сигналов (дифракция)

Рассмотрим поток излучения, падающий на зеркальную полосу с резкими краями, в результате чего он разбивается на две части – проходящую и отраженную. Каждая из частей регистрируется на верхней и нижней измерительных плоскостях. Каков бы ни был спектр излучения (набор гармоник или одна гармоника) из-за ограниченности энергии и, как следствие, быстроты (см. введение), чередующиеся сигнальные “полосы отображения” на обеих плоскостях не могут быть столь же резкими, как отражатели; они должны иметь *затянутые* (на величину $\sim \delta x$) и сглаженные края, как это показано на рис.5,а. Затянутость краев должна иметь определенную симметрию (сверху-вниз и справа-налево) потому, что сумма огибающих верхней и нижней частей должна давать исходную - *постоянную* величину интенсивности входного излучения в поперечном направлении. Это иллюстрируется наложением верхней и нижней полос отображения друг на друга на рис.5,б (сумма огибающих должна “восстанавливать” поперечный профиль входного потока).

Ясно, что суммарная энергия, попадающая на верхнюю и нижнюю регистрирующие плоскости, также должна быть равна энергии входного излучения. Однако, если просуммировать квадраты огибающих на рис.5,б, то этого явно не получится. На участках пересечения затянутых краев сумма квадратов огибающих (плотность энергии) будет неизбежно меньше плотности энергии в исходном потоке, ибо для любой функции $0 < y(x) < a$ и симметричной ей функции $'a - y(x)'$ сумма их квадратов: $y^2 + (a - y)^2 = a^2 - 2y(a - y)$ явно меньше a^2 .

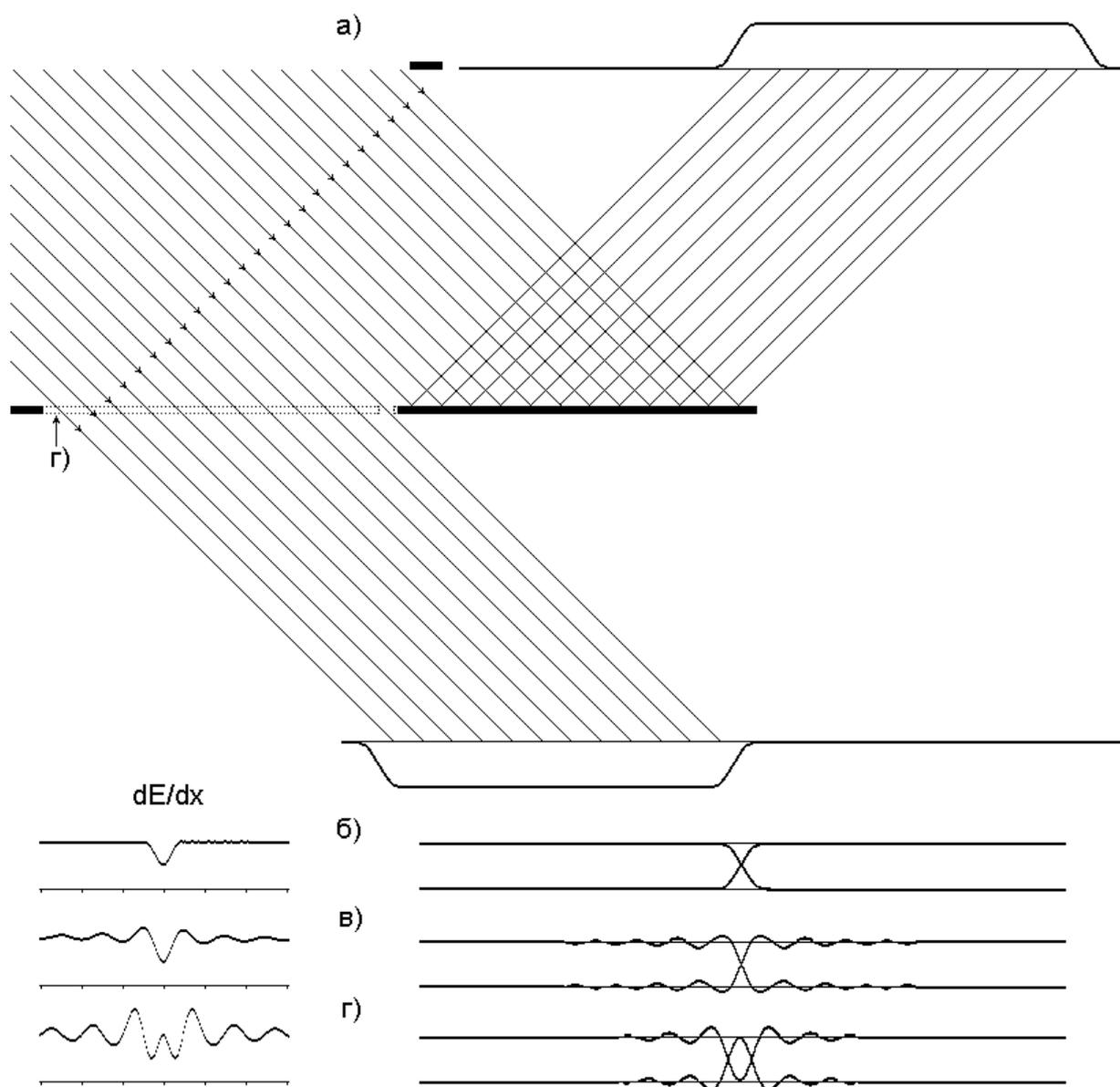


Рис.5. Расщепление излучения зеркальной полосой с резким краем – а); полосы “отображения” на верхней и нижней регистрирующей плоскостях не могут быть ступенчатыми ввиду конечности перепадов, но они должны быть симметричными, поскольку сумма верхней и нижней картин – б) должна давать исходную постоянную величину поперечного профиля излучения.

Условие сохранения энергии требует, чтобы и сумма квадратов была постоянной, но для “гладких” сигналов – б) это выполняться не может (см. график плотности энергии слева); сигналы должны иметь (затухающие) колебательные выбросы в начале и конце перепада – в), тогда сумма квадратов сохраняется постоянной, но лишь в пределах достаточно большого интервала.

Дифракционная картина от узкой щели – г) представляется производной от кривой – в), являющейся функцией отсчетов; в этом случае график суммарной плотности энергии – слева, также не является постоянным, хотя *в целом* (в среднем) энергия сохраняется.

Например, при линейной аппроксимации краев энергия растет как $\Delta x^3/3$ и доходит только до 0,33 вместо 0,5 для каждого края.

Появление колебаний при разложении сигналов. Если математика не дает возможности получить в зоне изменения сигналов *баланса плотностей* энергии, то попробуем посмотреть, как можно обеспечить хотя бы *баланс энергий* - в среднем, на малых (локальных) интервалах. Если в начале и конце каждого сглаженного перепада добавить небольшой выброс, как показано на рис.5,в, то сумма огибающих от этого не изменится, но приращение энергии на вершине и в основании перепада будут совершенно разными. Это дает возможность увеличить энергию каждого из сигналов при неизменной энергии их суммы, т.е. добиться баланса. При линейной аппроксимации уравнение, для половины выброса (по x), имеет вид: $0,33\Delta x^3 - (\Delta x - 1) = (0,5 - 0,33)/2$, решая которое имеем: $\Delta x = 1,3$ и выброс на 30% превышает основную интенсивность. Заметим, что из-за ограниченности спектра сигнала, выброс не может заканчиваться резко, и должен представлять из себя серию затухающих колебаний, что и отражено на рис.5,в. Для затухающей огибающей точное решение есть: $\Delta x = 1,25$ и выброс - 18% [1].

Как хорошо известно, дифракционная картина гармонической волны (обрезанный спектр) от края щели действительно содержит показанные на рис.5,в затухающие выбросы. Нарушение гладкости (апериодичности) сигналов как на вершине, так и в основании перепада, возможно лишь при отсутствии ряда высших гармоник в спектре сигнала [1]. Если бы все верхние (спадающие) гармоники в спектре отображения присутствовали, то оно, как нетрудно догадаться, было бы гладким. Как видим, “обрезанность” спектра и баланс энергий прекрасно увязываются друг с другом и отвечают за колебательный характер переходного процесса (от “света” к “тени”).

Функция отсчетов как элемент разложения. Отображение ступенчатого перепада должно описываться интегралом свертки от исходной - ступенчатой функции и некоторой функции, дающей реакцию на очень короткое (импульсное) возбуждение. Поскольку оригиналом является ступенька, то функция - элемент разложения должна описываться обычной *производной* от огибающей, показанной на рис.5,в. Тогда она должна выглядеть так, как изображено на рис.5,г.

При дифракции “коротким импульсом” служит узкая щель; она является суперпозицией двух перепадов: “оканчивающегося” (показан на рис.5,а пунктиром) и “начинающегося”, отстоящих на очень малый промежуток. Как хорошо известно, огибающая пространственного сигнала (дифракционная картина Фраунгофера [3]) от узкой щели, показанная для верхней и нижней плоскостей регистрации на рис.5,г, описывается квадратом функции вида $\sin(x)/x$.

В теории сигналов эта функция является одной из самых известных и называется функцией отсчетов [1]. В абстрактных математических переменных ее полная запись: $\text{Sinc}(x) = A \cdot \sin(\Delta \alpha \cdot x) / (\Delta \alpha \cdot x)$, где $\Delta \alpha = 2\pi \Delta \chi$ - “круговая” ширина ее спектра. Вид функции и ее спектра иллюстрируются

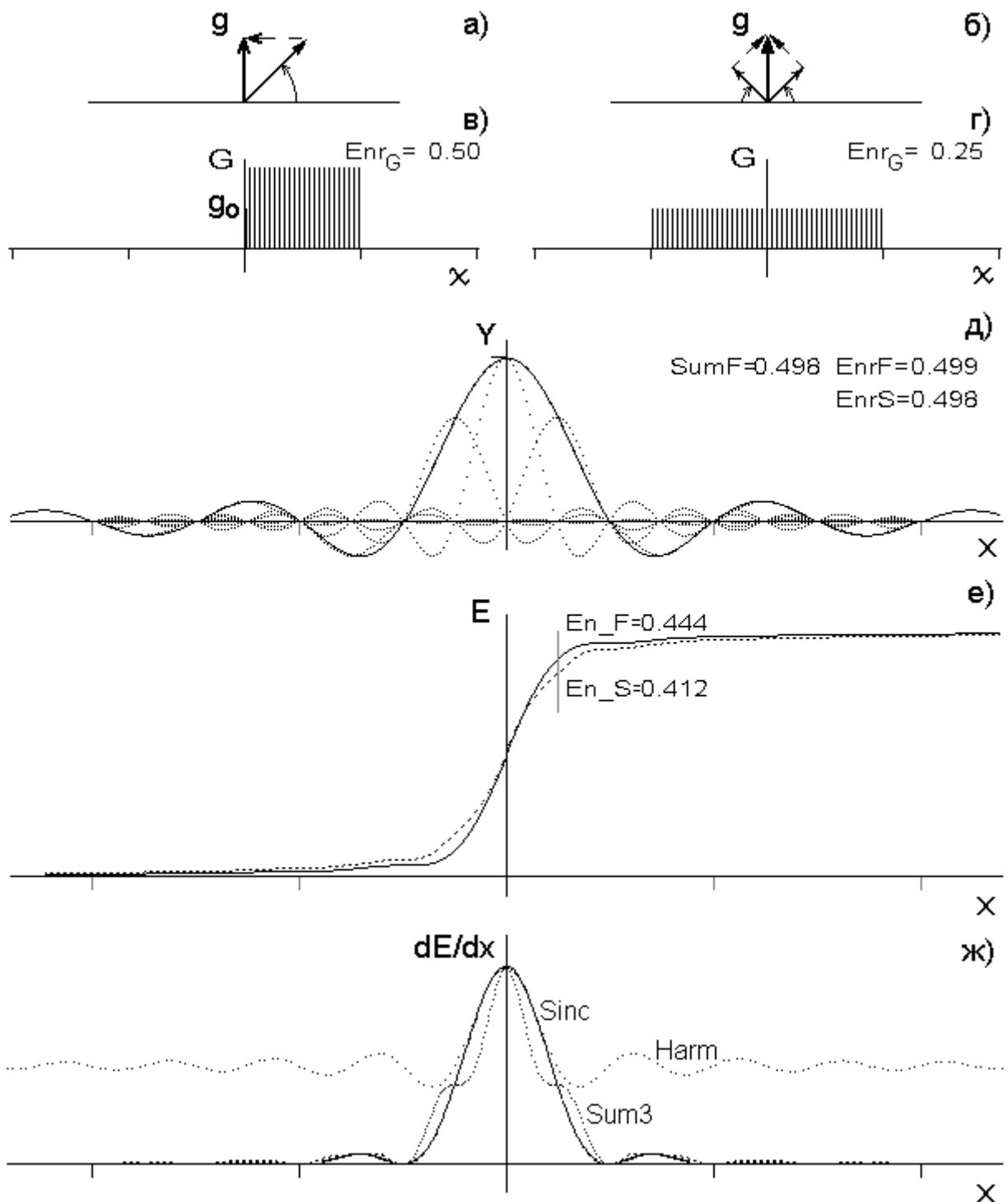


Рис.6. Векторные диаграммы гармоник однополосного - а) и двухполосного - б) спектров Фурье, сами спектры показаны на фрагментах в) и г); для примера взят плоский спектр функции отсчетов, построенной в д). Как видно из г), энергия в двухполосном спектре вдвое (для функции отсчетов) ниже ее реальной энергии $E=0,5$; в д) энергия функции отсчетов - $EnrF$ и ее площадь - $SumF$ несколько меньше 0,5 за счет обрезания ее бесконечных “крыльев” при $x = \pm 20$ (в центральном пике содержится 90% энергии).

Пунктирными линиями иллюстрируется разложение функции отсчетов на функции отсчетов с удвоенной шириной спектра (показаны только до $x = \pm 2$). Если разложение по огибающей является точным, то график энергии разлагаемой функции – е) и сумма энергий функций разложения (пунктир) разнятся - до 9%, уравниваясь только на бесконечности – $EnrS=EnrF$. Распределение плотностей энергии для функции отсчетов (Sinc), ее функций разложения (Sum3) и ее Фурье-гармоник (Harm) показано на фрагменте ж).

рис.6; ее спектр является необычным для классического сигнала не в том, что он плоский, а в том, что он *строго обрезан* в области высших частот. Обрезанность спектра противоречит классическому условию причинности [4], ибо при этом функция начинается в минус бесконечности – рис.6,д, т.е. появляется, как сигнал, явно ранее породившей его причины.

Согласно теореме отсчетов [1,5,6], любая функция со строго ограниченным (обрезанным) по ширине спектром - $\Delta\chi$ может быть точно представлена в виде суммы последовательных функций отсчетов с шириной спектра $2\Delta\chi$, отстоящих друг от друга на интервал $1/2\Delta\chi$. В качестве примера на рис.6,д штриховой линией показано саморазложение функции отсчетов на функции отсчетов с удвоенным по ширине спектром.

Из сказанного выше по поводу дифракции (см.рис.5,г - слева) можно заключить, что функция отсчетов как элемент разложения, не может обеспечивать равенства *плотностей* энергий. Это непосредственно подтверждается моделированием. На рис.6,е штриховой линией дана суммарная энергии функций разложения, не совпадающая в пределах центрального пика с энергией разлагаемой функции, разность достигает около 9%. Еще нагляднее это расхождение видно на графиках плотностей энергии: рис.6,ж – Sinc и Sum3. Этого и следует ожидать, т.к. в пределах центрального пика функции разложения однополярны и перекрываются (интерferируют).

Для сравнения, на этом же рисунке редкой пунктирной линией (Harm) показана сумма квадратов гармоник Фурье-разложения функции отсчетов. Как видим, они образуют плоскую подложку с выделяющимся вдвое пиком в середине – в месте совпадения горбов косинусоид спектра. Оба приведенных факта свидетельствуют о том, что математическое разложение сигналов является *формальным* - результирующий сигнал есть сумма огибающих гармоник, но физически он *не состоит* из этих гармоник.

Пороговое и предельное информационные соотношения

В работах [7,8] показано, что классический сигнал обладает бесконечной информационной емкостью, поскольку в нем любые сколь угодно малые и короткие отклонения *различимы*. Реальный сигнал, обладающий конечной информационной емкостью, должен подчиняться так называемым пороговому и предельному ограничениям на спектральную (1,б) и линейную (1,а) плотности энергии соответственно.

Если, например, функция отсчетов на рис.6,д близка к порогу, то ее “опережающее” крыло (в котором содержится 5% энергии) не может быть зарегистрировано, т.к. само по себе оно подпороговое, поэтому условие причинности не нарушается.

Для сигналов во времени пороговая постоянная имеет размерность *действия*; действительно, из (1,б) имеем (если χ это частота - ν): $\Delta E/\Delta\nu = g^2(\chi)$. Фундаментальной пороговой постоянной для электромагнитных сигналов является постоянная Планка – h .

Предельная информационная постоянная. Как мы выяснили, при встречной интерференции (17) вакуум ведет себя так, как будто в нем имеется или движение (L_B) или накопление (C_B) зарядов, однако, самих зарядов в нем в этом случае нет.

В свое время Максвеллом для обоснования наличия \hat{H} при отсутствии реальных зарядов был введен так называемый *ток смещения* откуда и появилось уравнение (15,б), отсюда же появляется и L_B . Из тех же соображений следовало бы ввести и нечто вроде “смещения зарядов”, отвечающего за появление C_B . Разумеется, никаких реальных, полноценных, наблюдаемых зарядов в данном случае нет. При классическом подходе появление чисто электрической или магнитной энергии можно связать с возникновением упорядоченного набора *частичных* (если угодно, неполных) диполей. Чем больше напряженность электрического поля, тем ближе каждый частичный диполь к паре, состоящей из реальных положительного и отрицательного зарядов. Из этого следует, что ток смещения может “идти” лишь в течение ограниченного времени.

Из энергии погонной емкости C_B нетрудно записать уравнение для максимальной напряженности электрического поля, при которой должен происходить переход “частичного” диполя в реальный, т.е. локальный электрический пробой вакуума, на который тратится энергия $m_e * c^2$ (еще одна “порция” $m_e * c^2$ затрачивается на разведение зарядов на бесконечность):

$$m_e * c^2 = C_B * U_M^2 / 2 = \Delta r * (U_M^2 / 8\pi\mu) \quad (18,а)$$

здесь m_e – масса электрона, считающаяся полностью полевой.

Эта же энергия для кулоновского поля может быть записана как:

$$m_e * c^2 = (e^2 / \epsilon) / \Delta r. \quad (18,б)$$

Величина, взятая в (18,б) в скобки есть (статическая) *пороговая* информационная постоянная Кулоновского поля - \hbar_C , ибо она имеет размерность: [энергия]*[длина]. Величина, взятая в скобки в (18,а), есть статическая предельная информационная постоянная - D , она имеет размерность: [энергия]/[длина]. Приравняв правые части (18,а,б), получим количественную оценку пространственной предельной постоянной:

$$D \approx (U_M^2 / 8\pi\mu) = m_e^2 * c^4 / (e^2 / \epsilon) = c^4 / \gamma_e, \quad (19,а)$$

где $\gamma_e = e^2 / (\epsilon * m_e^2)$ - величина, аналогичная постоянной тяготения (при такой записи D является аналогом “силы” физического взаимодействия).

Предельная мощность P может быть получена из D умножением на скорость света [6], откуда

$$P = c^5 / \gamma_e, \quad (19,б)$$

Как показано в [8], отношение P/\hbar определяет квадрат максимальной информационной пропускной способности (в данном случае - вакуума) в битах в секунду.

Заключение

Рассмотренные варианты сложения и разложения сигналов весьма просты и легко поддаются анализу. Тем не менее, из них следует целый ряд существенных выводов. Относительно интерференции:

- для уравнивания плотностей энергии исходных и суммарного сигналов они *обязаны* быть двухкомпонентными;
- в реальных сигналах энергия этих компонентов должна быть *разнотипна* и обладать способностью перехода от одного типа к другому;
- при многократной интерференции энергия одного из компонентов *может накапливаться* и исходное равенство энергий компонентов перестает соблюдаться.

Часто считается, что “дифракция есть частный случай интерференции”. Это не совсем так, по крайней мере, по трем причинам:

- дифракция происходит так, как если бы сигнал был *однокомпонентным*;
- в ней наглядно проявляется ограниченность спектра реального сигнала, тогда как при интерференции проще складывать сигналы с бесконечным спектром (например, прямоугольные) – как величины в математике;
- при дифракции *не соблюдается равенство плотностей энергии*, а только равенство энергий на конечных интервалах.

Кроме того, при дифракции:

- указанное равенство энергий выполняется за счет появления *колебательных выбросов* перед началом и по окончании основного перепада сигнала;
- функцией, входящей в интеграл свертки (функцией дифракции от узкой щели) является функция отсчетов;
- колебания крыльев функции отсчетов обусловлены *полным отсутствием* в ее спектре верхних гармоник, именно за счет этого и соблюдается баланс энергий.

Полное отсутствие высших гармоник в функции отсчетов (а это один из видов сигналов) является явным *указанием на существование информационного порога*, ибо сигнал с бесконечными крыльями противоречит классическому условию причинности.

Понимание того, что при интерференции сигналов в пространстве не может происходить бесконечное наращивание энергии одного из компонентов дает ключ к оценке *предельной информационной постоянной*, и далее к оценке информационной пропускной способности вакуума.

Литература

1. И.С.Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и Связь, 1986.
2. Г.С.Ландсберг. Оптика. М.:ГИТТЛ, 1952.
3. Б.И.Степанов. Введение в современную оптику. Мн.: Наука и техника, 1989.
4. Н.Винер. Кибернетика. М.: Наука, 1983.
5. У.М.Сиберт. Цепи, сигналы, системы. М.: Мир,1988.
6. В.А.Котельников, О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи, Материалы к 1-му Всес. съезду по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышл. Изд-во "Ред.связи РККА", 1933.
7. С.Г.Басиладзе. Сигнал, данные и информация в физических измерениях. Физика Элементарных Частиц и Атомного Ядра, 2000, том 31, вып.3, Дубна 2000.
8. С.Г.Басиладзе. Пороговые и предельные информационные соотношения для сигналов, Препринт НИИЯФ МГУ-2004-20/79. Москва 2004.

Сергей Геннадьевич Басиладзе

**Физические особенности сложения и разложения сигналов
и их информационные следствия**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006-2/801

Работа поступила в ОНТИ 15.03.2006 г.