НИИ Ядерной Физики
имени Д.В. Скобельцына

С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов

РЕПЕРНЫЙ И РЕПЕРНО-ТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Препринт НИИЯФ МГУ 2005-33/799

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов

РЕПЕРНЫЙ И РЕПЕРНО-ТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Препринт НИИЯФ МГУ 2005-33/799

УДК 531.51
ББК 22.382
П64

Keizerov S.I., Rakhmetov E.R.

rahmetov@theory.sinp.msu.ru

REFERENCE FRAME FORMALISM ON AN ARBITRARY PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLD

Preprint SINP MSU 2005-33/799

Abstract

A generalization of the reference frame formalism, used in General Relativity, for arbitrary dimension is suggested. We present a convenient notation based on the complex reference frame formalism in case of an arbitrary manifold. We pay special attention to obtaining expressions for covariant derivative and curvature in case of the reference frame formalism on arbitrary manifold. Results seem to be useful in analysis of various physical theories with extra dimensions, in particular Kaluza-Klein theories.

Кейзеров С.И., Рахметов Э.Р.

РЕПЕРНЫЙ И РЕПЕРНО-ТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация

В статье описывается обобщение реперного, а так же монадного и диадного (реперно-тензорного) формализма, используемого в ОТО, на многомерный случай. Предлагается формализм комплексного репера и основанная на нем форма записи различных физических величин удобная для многомерных пространств. Основное внимание уделяется получению общих формул для ковариантной производной и тензора кривизны в реперном и реперно-тензорном формализме на произвольном многообразии, а так же некоторым их частным случаям. Авторы полагают, что приведенные выражения будут полезны при анализе многомерных физических теорий, в частности теорий типа Калуцы-Клейна.

1. Введение. Стандартный реперный формализм.

В последние годы, благодаря изящной возможности решить проблему иерархии масштабов, резко возрос интерес к теориям типа Калуцы-Клейна [1,2,3]. Естественным математическим аппаратом для подобных теорий, где отдельные измерения являются выделенными по сравнению с другими, является реперный формализм и его разновидности (монадный, диадный, триадный, тетрадный и.т.д.). В литературе получены многочисленные выражения для кривизны и действия в подобных теориях в различных частных случаях. Представляется полезным выписать подобные выражения в случае произвольного многообразия произвольной (конечной) размерности.

В современной дифференциальной геометрии[1] под термином «реперное поле» («репер»)[2] подразумевается набор векторных полей $\mathbf{e}_i$ на многообразии, такой, что в каждой точке векторы линейно независимы, а их число совпадает с размерностью многообразия [5, 6]. Поля эти могут быть не дифференцируемыми (и даже не непрерывными), хотя обычно ограничиваются нужное число раз дифференцируемыми.

Введение такого набора можно рассматривать как альтернативу введению метрического тензора, но получаемый аппарат оказывается богаче. Например, Общая Теория Относительности (ОТО) может быть сформулирована без применения тетрадного формализма, однако для получения некоторых ее результатов (например, «локальной справедливости СТО») удобно пользоваться именно последним [7]. Более того, такие фундаментальные объекты современной физики как спиноры, вообще не могут быть определены в недекартовых

[1] По-видимому, первым, кто использовал заданную в каждой точке тройку векторов для анализа некоторых уравнений классической физики, был Ламе [4].

[2] Вообще говоря, термином «репер» математики обозначают базисный набор векторов линейного пространства, т.е. в дифференциальной геометрии под этим должен подразумеваться такой набор в касательном пространстве в одной единственной точке многообразия; совокупность таких наборов заданных во всех точках многообразия образуют набор векторных полей – «реперное поле»; тем не менее, использование термина «репер» в значении «реперное поле» не вызывает недоразумений.

координатах (даже в плоском пространстве) без привлечения понятия репера [8, 9].

Хотя репер, вообще говоря, может быть произвольным (главное, чтобы размерность оболочки, натянутой на реперные вектора совпадала с размерностью многообразия), обычно ограничиваются рассмотрением выделенных классов реперных полей. Чаще всего используется ортогональный репер [10], хотя для конкретной физической задачи может быть удобным и другие наборы (в формализме Ньюмана-Пенроуза [11], например, используются нулевые (светоподобные) тетрады). Нередко также используются «усеченные» реперы, когда в n-мерном пространстве вместо n векторов вводятся один (или более) вектор и метрический тензор на ортогональных векторам сечениях (монадный и диадный формализм, [12]). В дальнейшем, мы будем называть разновидность реперного формализма, использующего подобные «усеченные» реперы, *реперно-тензорным* или *смешанным* формализмом. Общим же для всех случаев является тот факт, что тетрада задает такую локальную систему отсчета (в окрестности точки, в которой задана тетрада) в которой метрический тензор имеет канонический вид (Лоренцев, в случае ортонормированного репера, полунулевой или нулевой в формализме Ньюмана-Пенроуза). Координаты векторов репера в произвольной системе координат при этом можно рассматривать как локальные коэффициенты перехода (производные новых координат по старым) к системе координат с каноническим видом метрического тензора [13].

Скалярные произведения реперных векторов $\eta_{ij} \equiv (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ в одной точке образуют заданную в этой точке матрицу. Вещественными линейными преобразованиями векторов эту матрицу можно сделать диагональной, причем на диагонали будут стоять ± 1. Если поле реперов непрерывно, то η_{ij} имеет один и тот же вид во всех точках (по крайней мере в области, во всех точках которой векторы репера независимы, т.е. тех точках, в которых определитель метрического тензора не равен нулю). Следствием этого и является возможность введения локальной системы координат, в которой метрика имеет Лоренцев вид. Этот результат можно обобщить на произвольный канонический вид метрического тензора. А именно, если сигнатура (набор знаков собственных значений) некоторой матрицы $\tilde{\eta}_{ij}$ совпадает с сигнатурой матрицы η_{ij}, то существует такое (вещественное)

линейное преобразование которое превращает η_{ij} в $\tilde{\eta}_{ij}$: $\tilde{\eta} = M \eta M^T$. И, значит, скалярные произведения векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i = M_i^j \mathbf{e}_j$ образуют матрицу $\tilde{\eta}_{ij}$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только диагональных η_{ij}, (и под каноническим будем подразумевать упорядоченный по сигнатуре вид $diag(-,...,-,+,...+)$), т.е. будем рассматривать только ортонормированные реперы.

Наряду с репером $\mathbf{e}_i$ рассматривают также ко-репер $\mathbf{e}'_i$, такой что скалярные произведения векторов из репера и ко-репера образуют единичную матрицу: $(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j) \equiv \delta_{ij}$. Обычно используют обозначения $\mathbf{e}^i$ вместо $\mathbf{e}'_i$. Очевидно, что $\mathbf{e}^i = \eta^{ij} \mathbf{e}_j$, где η^{ij} - матрица обратная к η_{ij}. Таким образом, получается полное формальное сходство с обычными векторами и ко-векторами.

Однако, в отличие от векторов и ко-веркторов, которые являются различными геометрическими объектами (принадлежат различным касательным пространствам), реперные и ко-реперные векторы – объекты одинаковой природы. На метрических многообразиях векторы и ко-векторы можно уже рассматривать как один объект (т.к. с помощью метрического тензора осуществляется взаимно однозначное соответствие между векторными и ко-векторными касательными пространствами), однако на самом деле мы по-прежнему имеем дело с парой объектов – с вектором и с метрическим тензором. В случае же реперов и ко-реперов дело обстоит не так. Дело в том, что матрица η_{ij}, которая определяет связь между репером и ко-репером фиксирована, поэтому, задавая набор реперных векторов, мы одновременно задаем и набор ко-реперных векторов. Например, если η_{ij} имеет канонический вид, то пары $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}_i$ коллинеарны, а если η_{ij} - единичная матрица, то репер и ко-репер совпадают. Казалось бы, логично всегда использовать вместо двух реперных наборов один, однако такое возможно, только если $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ и значит $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, т.е. на многообразиях с римановой, а не с псевдоримановой метрикой (локально евклидовой, а не псевдоевклидовой). Это происходит из-за того, что линейные вещественные преобразования не меняют сигнатуру матриц[3].

Четырехмерные варианты реперного формализма прекрасно изучены и давно успешно применяются в ОТО. Однако его многомерные обобщения, используемые в теориях типа Калуцы-Клейна, описаны гораздо менее полно. В связи с этим можно обратить внимание на следующие проблемы:

- Во-первых, отсутствие в литературе последовательного обобщения реперно-тензорных вариантов формализма в случае произвольного N-мерного многообразия. Варианты реперно-тензорного формализма, когда выделяется один или два вектора репера (монадный и диадный формализмы) изучены достаточно полно [12]. Понятно, что в на четырехмерных многообразиях помимо просто реперного (тетрадного) возникают только эти два варианта (триадный, как не трудно понять является тетрадным). Однако работы, в которых бы был рассмотрен общий случай, авторам не известны. Типичным примером многочисленных частных случаев является [14], где рассмотрены некоторые детали триадного формализма на семимерных многообразиях, который, однако, представлен лишь для определенного класса многообразий (нет зависимости большинства геометрических величин от каких-то координат). Кроме того, там, представлен, по сути, не 4+3 вариант, а 4+1+1+1, результатом чего является утеря явной симметрии между различными векторами.
- Во-вторых, избыточность используемых дифференциально-геометрических структур. А именно, использование двух наборов реперных векторов (репера и ко-репера), в тех случаях, когда незначительная модификация формализма, а именно переход к комплексным величинам, позволяет обойтись одним. Единственное оправдание традиционного подхода состоит в том, чтобы, оставаясь в рамках вещественных величин, получить знакопеременную сигнатуру метрики.
- В-третьих, отсутствие удобных общепринятых обозначений для тензорных величин в различных вариантах реперного формализма, особенно при его обобщении на многомерный случай. Необходимость различать тензорные и реперные индексы, расположенные на одних и тех же позициях (слева вверху и внизу от символа физической величины) и возможность сделать это различными способами приводит к тому, что каждый автор решает эту проблему по-своему. (Как правило, для индексов различных типов используются различные алфавиты.) Это может привести к некоторым затруднениям при чтении, написании и наборе формул даже при небольшом количестве индексов, а в случае увеличения числа их типов проблема усугубляется. При подобной перегруженности формул индексами различение реперных и кореперных индексов является излишеством, которого можно легко избежать, использовав формализм комплексного репера, и тем самым упростить чтение и набор соответствующих формул.

[3] Обычно считается, что выбор знака сигнатуры метрики – формальность, т.е. будем ли мы работь с метрическим тензором вида $diag(1,-1,-1,-1)$ либо $diag(-1,1,1,1)$ - дело вкуса конкретного автора. Однако, если принять такую точку зрения, евклидово пространство и пространство с метрическим тензором вида $diag(-1,-1,\ldots)$ ничем друг от друга не отличаются, однако во втором случае реперные и ко-реперные векторы попарно антиколлинеарны, а в первом – совпадают.

В этой статье мы представляем обобщение реперного, а так же монадного и диадного (реперно-тензорного) формализма, используемого в ОТО, на многомерный случай.

В разделе 2 предлагается формализм комплексного репера и основанная на нем форма записи различных физических величин удобная для многомерных пространств. Основные преимущества и возможные неудобства предложенной формы записи рассматривается в разделе 3. Основное внимание уделяется получению общих формул для ковариантной производной и тензора кривизны в реперном (раздел 2) и реперно-тензорном (раздел 4) формализме на произвольном многообразии, а так же некоторым их частным случаям. Авторы полагают, что приведенные выражения будут полезны при анализе многомерных физических теорий, в частности теорий типа Калуцы-Клейна. Выводы сделаны в разделе 5.

2. Формализм комплексного репера.

Как уже говорилось во введении, удобно было бы использовать вместо двух наборов реперов один, однако такое возможно только если $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ и значит $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, т.е. на многообразиях с римановой, а не с псевдоримановой метрикой (локально евклидовой, а не псевдоевклидовой). Это происходит из-за того, что линейные вещественные преобразования не меняют сигнатуру матриц.

Решить эту задачу можно, если вместо вещественных линейных преобразований рассматривать комплексные. Это не значит, что нужно рассматривать комплексные многообразия – в этом случае скалярное произведение определяется так что $(\mathbf{a}, k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, но $(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k^*(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, поэтому для любых двух реперов $\mathbf{e}_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_i$, связанных друг с другом комплексным преобразованием $\tilde{\mathbf{e}}_i = M_i^j \mathbf{e}_j$, матрицы скалярных преобразований будут связаны преобразованием $\tilde{\eta} = M^+ \eta M$. Последнее преобразование, как известно из линейной алгебры, также не меняет сигнатуру матриц. Вместо этого можно поискать такое комплексное преобразование, для которого будет справедливым выражение $M^T \eta M = \mathrm{I}$. Такие преобразования действительно существуют, например, $\bar{M} = diag(i,1,1,1)$ превращает Лоренцеву метрику $\eta = (-1,1,1,1)$ в евклидову.

Конечно, координаты векторов репера $\mathbf{e}_i$, для которого $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ уже нельзя рассматривать как коэффициенты перехода в локально-лоренцеву систему отсчета – репер комплексный, но многообразие (т.е. координатная сетка) по-прежнему вещественное.

В физических приложениях реперные поля вводятся обычно как форма представления уже имеющегося метрического тензорного поля $g_{\mu\nu}$ (см., например, [15]). Т.е. постулируется

$$\mathbf{e}_{i\mu}\mathbf{e}_{\nu}^{i} = \eta^{ij}\mathbf{e}_{i\mu}\mathbf{e}_{j\nu} \equiv g_{\mu\nu} \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{e}_{i\mu}$ - μ-я координата i-го реперного вектора в некоторой системе координат[4]. Причем $g_{\mu\nu}$ и $\mathbf{e}_i$ являются функциями координат, а η^{ij} от координат не зависит. Скалярное произведение с помощью метрического тензора записывается так:

$$\eta_{ij} \equiv (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{\mu\nu}\mathbf{e}_i^{\mu}\mathbf{e}_j^{\nu} \qquad (2.2)$$

[4] Точнее, в связанном с этой системой координат кокасательном базисе – в дальнейшем мы не будем делать таких уточнений.

Не трудно показать, что η_{ij} являет обратной матрицей к η^{ij}. Поскольку под η^{ij} подразумевается канонический вид метрического тензора (метрический тензор Минковского), то η_{ij} и η^{ij} совпадают.

Вместо выражений (2.1) и (2.2) мы постулируем соответственно

$$\sum_a g(a)_\mu g(a)_\nu \equiv g_{\mu\nu} \qquad (2.3)$$

$$g(a)_\mu g(b)^\mu = \delta(ab) \qquad (2.4)$$

где $g(a)_\mu$ - μ-я координата a-го вектора из некоторого набора из N векторных полей на многообразии (N - размерность многообразия). В дальнейшем мы этот набор будем также называть репером, помня, однако, что между ним и стандартным репером существует отличие. Отличие это заключается в том, что, как уже говорилось выше, для того, чтобы выполнялось выражение (2.4) на псевдоримановых многообразиях мы вынуждены рассматривать комплексные векторы $g(a)_\mu$. Покажем это явным образом. Действительно, для любой, наперед заданной, точки x_0 существует такая система координат y, в которой метрический тензор имеет канонический вид (как уже отмечалось, векторы стандартного репера $\mathbf{e}_i^\mu$ можно рассматривать как локальные коэффициенты перехода в эту систему координат). Т.е. в этой системе координат выражение (2.3) примет вид

$$g(a)_\mu g(a)_\nu = \eta_{\mu\nu} \qquad (2.5)$$

(здесь и далее в записях вида $X(a)Y(a)$ мы подразумеваем суммирование по совпадающим номерам, в данном случае по a, т.е. применяем аналог правила суммирования Эйнштейна). Для того, чтобы выполнялось выражение (2.5) достаточно положить

$$g(a)_\mu = (0,...,0,\sqrt{\pm 1},0,...,0) \qquad (2.6)$$

Т.е. a-я компонента a-го вектора равна 1, если компонента η_{aa} равна единице, и i, если компонента η_{aa} равна -1. В выписанном решении компоненты либо вещественные, либо мнимые; переходя в произвольную систему координат мы перемешиваем различные компоненты, поэтому, в общем случае, $g(a)_\mu$ - комплексные.

Разложение (2.3), удовлетворяющее (2.4) не однозначно. Набор векторов

$$g(a)'_\mu = M(ab)g(b)_\mu \tag{2.7}$$

также удовлетворяет (2.3) и (2.4), если для матрицы $M(ab)$ выполняется выражение

$$M(ab)M(ac) = \delta(ac) \tag{2.8}$$

т.е. $M^T = M^{-1}$. Это значит, что матица M принадлежит группе $O(N)$, а векторы $g(a)'_\mu$ и $g(a)_\mu$ связаны обычным евклидовым поворотом.

Между стандартным и комплексным реперами существует тесная связь. Действительно, любому комплексному реперу можно взаимно однозначно сопоставить некоторый стандартный репер по формулам

$$\mathbf{e}_{j\alpha} = m(a)_j\, g(a)_\alpha \tag{2.9а}$$

$$\mathbf{e}^j_\alpha = m(a)^+_j\, g(a)_\alpha \tag{2.9б}$$

где $m(a)_j$ - квадратная диагональная матрица, на диагонали которой стоят мнимые либо вещественные единицы – в зависимости от знаков сигнатуры:

$$m(a)_j = diag\left(i \quad ... \quad 1 \quad ...\right) \tag{2.10}$$

Выражение (2.9б) с формальной точки зрения (последовательного тензорного анализа) небезупречно, т.к. слева индекс j стоит сверху, а справа – снизу. Этого можно было бы избежать, если бы мы наряду с матрицей (2.10) ввели матрицу $m(a)^j \equiv [m(a)_j]^+$, однако такое усложнение представляется излишним, потому что выражение (2.9б) не вызывает разночтений.

Пусть V_μ - произвольное векторное поле. Т.к. $g(a)_\mu$ образуют базис в каждой точке многообразия, то мы можем записать разложение

$$V_\mu = V(a)g(a)_\mu \tag{2.11}$$

А так как $g(a)_\mu$ - ортонормированные, то для $V(a)$ мы имеем выражение

$$V(a) = g(a)^\mu V_\mu \tag{2.12}$$

В дальнейшем под термином «вектор» (а также «тензор» и т.д.) мы будем подразумевать некоторый абстрактный объект V, а V_μ и $V(a)$ будем рассматривать как его координатное и реперное представления. При этом для всех представлений объекта V мы будем использовать тот же символ (в приведенном примере – V). Для тензоров второго и более рангов возможны также смешанные представления, например

$$W_{\mu\nu} = W(a)_\nu g(a)_\mu = W_\mu(a)g(a)_\nu = W(ab)g(a)_\mu g(b)_\nu$$

При этом нужно помнить, что относительно общекоординатных преобразований величины $W_{\mu\nu}$ преобразуются как тензор второго ранга, $W_\mu(a)$ и $W(a)_\mu$ - как векторы, а $W(ab)$ представляет набор скаляров. С другой стороны, относительно группы вращений репера (2.7) величины $W_{\mu\nu}$ инвариантны, $W_\mu(a)$ и $W(a)_\mu$ преобразуются как векторы, а $W(ab)$ - как тензор.

Видно, что $g(a)_\mu$ можно рассматривать как смешанное представление метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (по этой, кстати, причине мы и использовали для метрического тензора и для реперных векторов один и тот же символ g).

Для сверток справедливо утверждение

$$V(a)W(a) = V^\mu W_\mu \tag{2.13}$$

С частными и ковариантными производными дело обстоит сложнее:

$$\begin{aligned} &V(a)\nabla_\mu W(a) = \\ &= V^\alpha \nabla_\mu W_\alpha + V^\alpha W^\beta g(a)_\alpha \nabla_\mu g(a)_\beta \neq V^\alpha \nabla_\mu W_\alpha \end{aligned} \tag{2.14}$$

Определим «реперную производную» D_μ так, чтобы для произвольных векторов V и W выполнялось равенство

$$V^\alpha D_\mu W_\alpha = V(a)D_\mu W(a) \tag{2.15}$$

и при этом для объекта в координатном представлении реперная производная совпадала с ковариантной:

$$D_\mu W_\alpha = \nabla_\mu W_\alpha \tag{2.16}$$

Для того, чтобы выполнялось равенство (2.15) необходимо и достаточно, чтобы реперная производная репера была равна нулю:

$$D_\mu g(a)_\alpha = 0 \qquad (2.17)$$

Если мы положим для произвольного вектора V

$$D_\mu V(a) = \partial_\mu V(a) + C_\mu(ab)V(b) \qquad (2.18)$$

или в общем виде

$$\begin{aligned} D_\mu V(a_1 a_2 ...)_{\alpha_1\alpha_2...} &= \nabla_\mu V(a_1 a_2 ...)_{\alpha_1\alpha_2...} + \\ &+ C_\mu(a_1 b)V(bA_2...)_{\alpha_1\alpha_2...} + C_\mu(a_2 b)V(a_1 b...)_{\alpha_1\alpha_2...} + ... \end{aligned} \qquad (2.18б)$$

то выражение (2.17) после элементарных преобразований нам даст

$$C_\mu(ab) = g(a)^\alpha \nabla_\mu g(b)_\alpha \qquad (2.19)$$

Не трудно убедиться, что $C_\mu(ab) = -C_\mu(ba)$. Из выражения (2.19) следует также, что $C_\mu(ab)$ представляет собой вектор относительно общекоординатных преобразований. В стандартном репере этим величинам соответствуют т.н. «коэффициенты вращения Риччи»; мы будем использовать этот же термин для $C_\mu(ab)$.

В (псевдо)римановой геометрии связности в ковариантной производной совпадают с символами Кристоффеля. Мы можем выразить символы Кристоффеля через производные от реперных векторов и подставить получившееся выражение в ковариантную производную в выражении (2.19); после некоторых преобразований мы получим выражение

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(F_{\gamma\beta\alpha} + F_{\beta\alpha\gamma} + F_{\alpha\beta\gamma}\right) \qquad (2.20)$$

где тензор F третьего ранга определенный следующей формулой

$$F(a)_{\alpha\beta} \equiv \partial_{[\beta} g(a)_{\alpha]} \qquad (2.21)$$

Заметим, что полностью координатное представление $F_{\alpha\beta\gamma}$ является вещественным. Действительно, с использованием формул (2.9а,б) мы можем записать

$$F(a)_{\alpha\beta} = m(a)_i F^i_{\alpha\beta} \qquad (2.22)$$

где $F^i_{\alpha\beta}$ - тензор, определенный аналогично $F(a)_{\alpha\beta}$ (2.21) через стандартный репер $\mathbf{e}^i_\alpha$:

$$F^i_{\alpha\beta} \equiv \partial_{[\beta}\mathbf{e}^i_{\alpha]} \qquad (2.21б)$$

Следовательно, для $F_{\alpha\beta\gamma}$ мы имеем

$$F_{\alpha\beta\gamma} = g(a)_\alpha m(a)_i F^i_{\beta\gamma} = \mathbf{e}_{i\alpha} F^i_{\beta\gamma} \qquad (2.23)$$

Т.е., при вычислении тензора $F_{\alpha\beta\gamma}$ не имеет значения, через какой репер – комплексный или стандартный этот тензор определен. Этот результат является частным случаем общего утверждения: во всех случаях, когда рассматриваемый объект представлен только в координатном базисе, не имеет значение с каким репером – комплексным или стандартным – мы работаем. Для произвольных векторов (тензоров и т.д.) данное высказывание тривиально, однако для объектов, определяемых через репер (как в рассмотренном только что случае) это утверждение уже обладает нетривиальным содержанием.

Поскольку при использовании стандартного репера мы (в данном случае) имеем дело только с вещественными величинами, то тензор $F_{\alpha\beta\gamma}$ – вещественный.

Условимся под $\partial(a)$ и $\nabla(a)$ понимать проекции частной и ковариантной производной, в которых $g(a)^\mu$ стоит слева, т.е. операторы на него не действуют:

$$\partial(a) \equiv g(a)^\mu \partial_\mu \qquad (2.24а)$$

$$\nabla(a) \equiv g(a)^\mu \nabla_\mu \qquad (2.24б)$$

(аналогично можно определить и $D(a)$, но в силу (2.17) не имеет значения, справа или слева от D_μ стоит $g(a)^\mu$). При этом, если V - скаляр, то $\partial(a)V$ - набор скаляров, а если вектор – то $\nabla(a)V_\alpha$ - набор векторов относительно общекоординатных преобразований.

Пусть φ - произвольное скалярное поле. Действие оператора Лапласа на φ можно задать выражением

$$\Delta\varphi \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu \varphi \qquad (2.25)$$

помня при этом, что один оператор действует на скаляр (и, следовательно, совпадает с оператором частной производной), а второй оператор действует на вектор. Поэтому мы можем записать[5]

$$\Delta\varphi = \nabla^{\mu}\partial_{\mu}\varphi = \nabla^{\mu}g(a)_{\mu}\partial(a)\varphi = [\nabla_{\mu}g(a)^{\mu}]\partial(a)\varphi + g(a)_{\mu}\nabla^{\mu}\partial(a)\varphi \tag{2.26}$$

Так как $\partial(a)\varphi$ - скаляры, то ковариантная производная во втором слагаемом в правой части совпадает с частной, а для $\nabla_{\mu}g(a)^{\mu}$ с использованием (2.19) имеем

$$\nabla_{\mu}g(a)^{\mu} = C(bba) \tag{2.27}$$

и в результате получаем следующее выражение для оператора Лапласа:

$$\Delta = C(bba)\partial(a) + \partial(a)\partial(a) \tag{2.28}$$

Тензор кривизны Римана-Кристоффеля опреде-ляется через коммутатор ковариантной производной; например, для произвольного вектора V:

$$\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}V_{\beta} \equiv R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}V_{\alpha} \tag{2.29}$$

Следовательно, мы можем записать

$$g(a)_{\alpha}\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}g(a)_{\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2.29б}$$

Снова вспомнив про (2.19) получаем

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g(a)_{\alpha}\nabla_{[\mu}C_{\nu]\beta}(a) = \nabla_{[\mu}C_{\nu]\beta\alpha} - C_{[\nu|\beta\lambda|}C_{\mu]\alpha}{}^{\lambda} \tag{2.30}$$

Сверткой по паре индексов мы получаем тензор кривизны Риччи

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\nu}{}_{\alpha\beta\nu} = \nabla_{[\beta}C_{\nu]\alpha}{}^{\nu} - C_{[\beta}{}^{\nu\mu}C_{\nu]\alpha\mu} \tag{2.31}$$

Сворачивая оставшуюся пару индексов, получаем скалярную кривизну:

$$R \equiv R^{\beta}{}_{\beta} = 2\nabla_{\alpha}C_{\beta}{}^{\alpha\beta} + C_{\alpha}{}^{\beta\gamma}C_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + C_{\beta}{}^{\gamma\beta}C_{\alpha\gamma}{}^{\alpha} \tag{2.32}$$

---

[5] Мы подразумеваем, что в выражениях типа $[\nabla_{\mu}A]B$ оператор ∇_{μ} действует только на то, что стоит вместе с ним в квадратных скобках, т.е. на A, но не на B. Это обозначение будет использоваться во всех случаях, когда для оператора L выражения $[LA]B$ и LAB не совпадают.

Обратим внимание, что все три слагаемые в выражении (2.32) являются скалярами. Перепишем выражение для кривизны с использованием тензора F. Подставив (2.20) в (2.32), получаем

$$R = 2\nabla_{\alpha}F^{\beta\alpha}{}_{\beta} + F^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}F^{\beta\gamma}{}_{\beta} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta\gamma}F^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\alpha\gamma} \tag{2.33}$$

Второе, третье и четвертое слагаемые в выражении (2.33) представляют скаляры. Этими скалярами исчерпываются все возможные скалярные комбинации, квадратичные по первым *частным* производным реперных векторов. Можно также показать, что каждый из этих скаляров линейно выражается через скаляры $C_{\alpha\beta\gamma}C^{\alpha\beta\gamma}$, $C_{\alpha\beta\gamma}C^{\beta\gamma\alpha}$ и $C^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}C^{\beta\gamma}{}_{\beta}$, которыми, в свою очередь, исчерпываются все возможные скалярные комбинации, квадратичные по первым *ковариантным* производным реперных векторов. В тетрадной теории гравитации именно линейную комбинацию этих скаляров иногда берут в качестве лагранжиана гравитационного поля [16,17].

Определим следующий тензор:

$$\tilde{F}_{\alpha\beta\gamma} \equiv F_{\alpha\beta\gamma} + a_1F_{[\beta\gamma]\alpha} + a_2F^{\mu}{}_{\mu[\gamma}g_{\beta]\alpha} \tag{2.34}$$

Не трудно убедиться, что произвольная скалярная комбинация

$$k_1F_{\alpha\beta\gamma}F^{\alpha\beta\gamma} + k_2F_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\alpha\gamma} + k_3F^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}F^{\beta\gamma}{}_{\beta} \tag{2.35}$$

совпадает с $k\tilde{F}(abc)\tilde{F}(abc)$, если положить

$$k[1+2a_1^2] = k_1 \tag{2.36а}$$

$$-2ka_1[2+a_1] = k_2 \tag{2.36б}$$

$$2ka_2[2-2a_1+(N-1)a_2] = k_3 \tag{2.36в}$$

Систему (2.36а-в) можно решить относительно параметров a_1, a_2 и k. В общем случае решения будут комплексными, например, если мы хотим получить часть скалярной кривизны (т.е. $k_1 = -1/4$, $k_2 = -1/2$ и $k_3 = 1$), то именно так дела и обстоят. Можно также показать, что не существует таких k, a_1 и a_2, чтобы эту часть кривизны можно было бы представить в виде $k\tilde{F}^{+}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{F}^{\alpha\beta\gamma}$.

Т.о. мы можем представить кривизну в виде

$$R = k\tilde{F}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{F}^{\alpha\beta\gamma} + 2\nabla_{\alpha}F^{\beta\alpha}{}_{\beta} \tag{2.37}$$

а действие в общей теории относительности с точностью до поверхностных членов

$$S=-\frac{k}{2\kappa}\int_X \sqrt{|g|}\tilde{F}(abc)\tilde{F}(abc) \qquad (2.38)$$

(κ - гравитационная постоянная), причем $\tilde{F}(abc)$ - комплексные.

3. Сравнительные преимущества используемой формы записи.

Остановимся детально на тех преимуществах, которые может дать формализм комплексного репера для формы записи различных физических величин.

Как было показано в разделе 2, между стандартным и комплексным репером есть взаимнооднозначное соответствие, и любое выражение в одном репере переводится в выражение в другом простой заменой обозначений и индексов (с учетом различия между реперными и ко-реперными индексами в стандартном формализме). Зачем же вводить еще одну конструкцию, если она эквивалентна существующей?

Во-первых, представляется логичным использование одного набора векторных полей вместо двух в ситуации, когда один из этих наборов однозначно определяется через другой. Это тем более является уместным, если рассматривать геометрические объекты как абстрактные алгебраические конструкции (см. пояснение, к формуле (2.12)). Дело в том, что на (псевдо)римановых многообразиях ковариантные и контравариантные векторы можно рассматривать как различные представления одного и того же объекта – элемента линейного (векторного) пространства. Аналогичным образом обстоит дело с другими геометрическими объектами.

Во-вторых, подобные обозначения позволяют использовать так называемый формализм абстрактных меток, развиваемый Пенроузом и Риндлером в [18,19], где авторы приходят к необходимости (из соображений удобства, в том числе для представления в печатном виде) использования индексов, подобных тензорным, для *обозначения* тензоров того или иного ранга (валентности). Причем геометрические индексы в отличие от абстрактных обозначаются жирным шрифтом [18]. В какой-то степени идеология абстрактных индексов содержится и в стандартной тензорной (реперной) алгебре. В подавляющем большинстве выражений индексы (ковариантные, контравариантные, реперные, кореперные) можно рассматривать как обозначения конкретных компонент в соответствующих базисах, а можно – как указатели на принадлежность к

определенным алгебраическим структурам и наличию неких частных свойств и операций (симметрии, свертки и пр.). В нашем случае достаточно использовать индексы одного типа, поскольку мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными объектами. И хотя мы не рассматривали до сих пор индексы любых типов как абстрактные, можно отметить, что реперные индексы обладают всеми свойствами таковых.

В-третьих, запись, при которой реперные индексы записываются в круглых скобках рядом с символом объекта, на наш взгляд максимально информативна, не допускает разночтений и легко исправляется читателем при ошибках в наборе и написании. Разумеется, мы могли бы помещать реперные индексы на тех же позициях, что и координатные (сверху или снизу от объекта, как это традиционно принято), а чтобы отличать их от последних, выделять каким-либо образом. Например, можно было бы использовать разные алфавиты или большие и малые буквы одного алфавита для обозначения индексов различной природы. Однако, если помимо геометрических приходится явным образом выписывать еще какие-нибудь (спинорные, групповые или «внутренние») индексы, подобный подход приводит к очевидным неудобствам при чтении, написании и наборе, в силу возможности легко перепутать координатные и реперные индексы. Но даже в тех случаях, когда индексов всего два, все-таки можно ошибиться в прочтении формулы, если перепутать, каким алфавитом какой тип индексов обозначается. Например, в [15] для координатных индексов используются последние буквы греческого алфавита, а для реперных – начальные, что легко приводит к ошибкам при большом количестве индексов. Еще одна проблема – порядок индексов. Если часть индексов стоят в верхних, часть в нижних позициях, то очередность индексов не всегда легко определяется однозначно; это заставляет авторов придерживаться стиля, при котором все ковариантные индексы следуют за контравариантными, что не всегда возможно. Некоторые авторы решают эту проблему использованием точек напротив (сверху или снизу) символов. Запись индексов в круглых скобках рядом с символом объекта позволяет сгладить эти проблемы – при всем желании эти индексы невозможно спутать с координатными или перепутать порядок их следования.

Конечно, при этом могут возникать затруднения с перенесением некоторых иных традиционных обозначений в новую форму записи. Например, теперь становится невозможным использовать выражения типа $W^{[pq]}$ для антисимметричной комбинации $W^{pq} - W^{qp}$; наверное, это следует рассматривать как плату за вышеперечисленные преимущества. Выражения становятся несколько больше по размерам за счет использования большего кегля для символов (и выписывания скобок), но это можно рассматривать и как недостаток и как достоинство, во всяком случае, более громоздкими и трудными для чтения формулы от этого не становятся.

4. Смешанный (реперно-тензорный) формализм.

В некоторых задачах геометрия многообразия такова, что можно задать такую координатную систему, в которой становится логичным выделение одного или нескольких направлений. Например, в пространственно однородных космологических моделях таким выделенным направлением является время. В теориях типа Калуцы-Клейна [20,21,22] направления вдоль наблюдаемых четырехмерных координат качественным образом могут отличаться от дополнительных. Для описания таких многообразий удобно использовать «усеченные» реперы, когда в N-мерном пространстве вместо N векторов вводятся один (или более) вектор и метрический тензор на ортогональных векторам сечениях. (См. «монадный», «диадный» и т.д. варианты реперного формализма [7,12].) В дальнейшем мы будем именовать этот вариант реперного формализма «реперно-тензорным» или «смешанным».

Произведем сначала некоторые изменения в обозначениях, полезные в случае произвольной размерности многообразия. Индексы (как координатные, так и реперные), которые принимают все возможные значения, будем обозначать большими латинскими буквами. Индексы, которые принимают значения с первого по n-е (с нулевого по $(n-1)$-е, если, как принято в физике временная координата нумеруется нулем) обозначать малыми греческими буквами. Оставшиеся возможные значения будем обозначать малыми латинскими индексами. Соответственно, в выражениях типа $V_\alpha W^\alpha$ и $V(\alpha)W(\alpha)$ подразумевается суммирование от одного до n, а в выражениях типа $V_q W^q$ и $V(q)W(q)$ - от $n+1$ до N.

Разобьем сумму (2.3) на две части:

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB} \tag{4.1}$$

где

$$\eta_{AB} = g(\alpha)_A g(\alpha)_B \tag{4.2а}$$

$$h_{AB} = g(a)_A g(a)_B \tag{4.2б}$$

В силу ортогональности репера, тензоры η_{AB} и h_{AB} также ортогональны. Запишем:

$$\eta_{AB} g(a)^B = 0 \tag{4.3}$$

Линейным преобразованием (2.7) мы всегда можем добиться того, что компоненты с $n+1$ по N-ю у первых n векторов репера были равны нулю:

$$g(\alpha)_p \equiv 0 \tag{4.4}$$

Это автоматически влечет

$$\eta_{pA} = 0 \tag{4.5}$$

Используя (4.5) соотношение ортогональности (4.3) можно переписать в виде:

$$g(a)^\mu \eta_{\mu B} = 0 \tag{4.6}$$

В силу независимости $g(\alpha)_A$ определитель $\eta \equiv \det \eta_{\mu\nu}$ (определитель матрицы $n \times n$, а не $N \times N$!) отличен от нуля, и значит уравнение (4.6) имеет только тривиальные решения:

$$g(a)^\mu = 0 \tag{4.7}$$

Далее, поднимая у метрического тензора один или два индекса, мы можем получить следующие выражения:

$$g(a)^p g(a)_q = \delta^p_q \tag{4.8а}$$

$$\eta^{\mu\tau}\eta_{\tau\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{4.8б}$$

$$\eta^p_\mu = -g(a)^p g(a)_\mu \tag{4.8в}$$

$$\eta^A_p = 0 \tag{4.8г}$$

$$\eta^{\mu q} = -\eta^{\mu\nu} g(a)_\nu g(a)^q \tag{4.8д}$$

$$\eta^{pq} = g(a)^p g(b)^q \eta^{\mu\nu} g(a)_\mu g(b)_\nu \tag{4.8г}$$

$$g(\alpha)^q = -g(\alpha)^\mu g(a)_\mu g(a)^q \tag{4.8д}$$

Выпишем еще для наглядности компоненты метрического тензора в виде матриц

$$g_{PQ} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} + g(a)_\mu g(a)_\nu & g(a)_\mu g(a)_q \\ g(a)_p g(a)_\nu & g(a)_p g(a)_q \end{pmatrix} \quad (4.9а)$$

$$g^{PQ} =$$

$$= \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} & -\eta^{\mu\alpha} g(a)_\alpha g(a)^q \\ -g(a)^p \eta^{\nu\alpha} g(a)_\alpha & g(a)^p g(a)^q + \eta^{\alpha\beta} g(a)_\alpha g(b)_\beta g(a)^p g(b)^q \end{pmatrix}$$

(4.9б)

Вычислим определитель g. Если произвольную квадратную матрицу M разбить на блоки

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

где A и B – квадратные матрицы, то определитель исходной матрицы будет равен

$$\det M = \det[A - CB^{-1}D]\det B$$

Исходя из этого и из вида (4.9а) не трудно получить

$$g \equiv \det g_{AB} = \det[g(a)_p g(a)_q]\det[\eta_{\mu\nu}] = h\eta \quad (4.10)$$

где мы обозначили h - определитель тензора h_{pq}, рассматриваемго как матрица $(N-n)\times(N-n)$.

Из выражения (4.10) мы имеем очень важное следствие о факторизации меры. Например, если существует такая система координат, в которой η зависит только от координат x^μ (первых n координат), то для произвольной функции f (скалярной ли, тензорной или другой природы) интегралы по всему многообразию можно представить в виде повторных:

$$\int_{X^N} f(x^\mu, x^q)\sqrt{|g|}d^N x = \int_{X^n} \sqrt{|\eta|}d^n x \int_{X^{N-n}} f(x^\mu, x^q)\sqrt{|h|}d^{N-n}x$$

(4.11)

Здесь X^N - общее N мерное многообразие, X^n - некоторое n-мерное подмногообразие в X^N, а X^{N-n} - сечения, которые в общем случае зависят от координат на X^n. Заметим, что конкретный вид правой части существенным образом зависит от того, какая координатная система используется.

Аналогично разложению (2.11) мы можем записать разложение

$$V_P = V_{\tilde{P}} + V(a)g(a)_P \quad (4.12)$$

где $V_{\tilde{P}}$ - проекция V_P на η_{AB}, а $V(a)$ - как и раньше - проекция V_P на базисные векторы $g(a)_P$. Легко получить выражения для этих проекций

$$V(a) = g(a)^P V_P = g(a)^p V_p \quad (4.13а)$$

$$V_{\tilde{P}} = \eta_P^Q V_Q \Rightarrow \begin{cases} V_{\tilde{\mu}} = V_\mu - g(a)_\mu V(a) \\ V_{\tilde{q}} = 0 \end{cases} \quad (4.13б)$$

Не трудно убедиться, что поднятие и опускание волнистых индексов производится с помощью тензора $\eta_{\mu\nu}$

$$V^{\tilde{\mu}} = \eta^{\mu\nu} V_{\tilde{\nu}} \quad (4.14а)$$

$$V_{\tilde{\mu}} = \eta_{\mu\nu} V^{\tilde{\nu}} \quad (4.14б)$$

Поэтому $\eta_{\mu\nu}$ можно рассматривать как метрический на сечениях $x^q - const$. Аналогичным образом можно прийти к выводу, что h_{pq} можно рассматривать как метрический на сечениях $x^\mu - const$.

Аналогом выражения (2.13) для сверток является

$$V^P W_P = V(A)W(A) = V(a)W(a) + V^{\tilde{\mu}} W_{\tilde{\mu}} \quad (4.15)$$

Но возникает та же проблема, что и в (2.14)

$$V^P \nabla_{\tilde{\nu}} W_P \neq V(a)\nabla_{\tilde{\nu}} W(a) + V^{\tilde{\mu}} \nabla_{\tilde{\nu}} W_{\tilde{\mu}} \quad (4.16а)$$

$$V^P \nabla(b) W_P \neq V(a)\nabla(b) W(a) + V^{\tilde{\mu}} \nabla(b) W_{\tilde{\mu}} \quad (4.16б)$$

Однако определенная выражением (2.18) производная (точнее ее проекции) обладает тем замечательным свойством, что

$$[D_{\tilde{\nu}}, g(a)_P] = 0 \quad (4.17а)$$

$$[D(b), g(a)_P] = 0 \quad (4.17б)$$

$$[D_{\tilde{\nu}}, \eta_\mu^A] = 0 \quad (4.17в)$$

$$[D(b), \eta_\mu^A] = 0 \quad (4.17г)$$

И поэтому

$$V^P D_{\tilde{\nu}} W_P = V(a) D_{\tilde{\nu}} W(a) + V^{\tilde{\mu}} D_{\tilde{\nu}} W_{\tilde{\mu}} \quad (4.18а)$$

$$V^P D(b) W_P = V(a) D(b) W(a) + V^{\tilde{\mu}} D(b) W_{\tilde{\mu}} \quad (4.18б)$$

и

$$D_{\tilde{\nu}}W_P = \nabla_{\tilde{\nu}}W_P \qquad (4.19а)$$

$$D(a)W_P = \nabla(a)W_P \qquad (4.19б)$$

Общее выражение для произвольного объекта V записывается так:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\nu}}V(a_1a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} &= \nabla_{\tilde{\nu}}V(a_1a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + \\ &-\Gamma(b)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\nu}}V(a_1a_2\ldots b)_{\tilde{\mu}_2\ldots} - \Gamma(b)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\nu}}V(a_1a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1}(b)_{\tilde{\mu}_3\ldots} - \ldots \\ &+C_{\tilde{\nu}}(a_1b)V(ba_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + C_{\tilde{\nu}}(a_2b)V(a_1b\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + \ldots + \\ &-C_{\tilde{\nu}\tilde{\tau}}(a)V^{\tilde{\tau}}(a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} - C_{\tilde{\nu}\tilde{\tau}}(a)V(a_1)^{\tilde{\tau}}(a_3\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} - \ldots \end{aligned} \qquad (4.20а)$$

и

$$\begin{aligned} D(c)V(a_1a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} &= \nabla(c)V(a_1a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + \\ &-\Gamma(bc)_{\tilde{\mu}_1}V(a_1a_2\ldots b)_{\tilde{\mu}_2\ldots} - \Gamma(bc)_{\tilde{\mu}_1}V(a_1a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1}(b)_{\tilde{\mu}_3\ldots} - \ldots \\ &+C(ca_1b)V(ba_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + C(ca_2b)V(a_1b\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + \ldots + \\ &+C(ca)_{\tilde{\nu}\tilde{\tau}}V^{\tilde{\tau}}(a_2\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} + C(ca)_{\tilde{\nu}\tilde{\tau}}V(a_1)^{\tilde{\tau}}(a_3\ldots)_{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\ldots} - \ldots \end{aligned} \qquad (4.20б)$$

Посмотрим, как выражается кривизна через $\eta_{\mu\nu}$ и $g(a)_P$. Выпишем следующие вспомогательные величины:

$$f(abc) \equiv g(b)^p g(c)^q g(a)_{[p,q]} \qquad (4.21а)$$

$$u(ab)_{\tilde{\alpha}} \equiv g(b)^q \partial_\alpha g(a)_q - \partial(b)g(a)_\alpha \qquad (4.21б)$$

$$v(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \equiv g(\alpha)_\alpha \partial(a) g(\alpha)_\beta \qquad (4.21г)$$

$$\begin{aligned} &\overline{F}(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \equiv \\ &\equiv g(a)_{[\alpha,\beta]} - g(p)_{[\alpha}u(ap)_{\beta]} + g(p)_\alpha g(q)_\beta f(apq) \end{aligned} \qquad (4.21д)$$

$$S_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} \equiv g(\alpha)_\alpha g(p)_{[\beta}\partial(p)g(\alpha)_{\gamma]} \qquad (4.21е)$$

$$W_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} \equiv g(\alpha)_\alpha g(\alpha)_{[\beta,\gamma]} \qquad (4.21ж)$$

$$P(abc) \equiv \frac{1}{2}\big(f(abc) + f(bac)\big) \qquad (4.21з)$$

$$\widehat{u}(ab)_{\tilde{\mu}} \equiv \frac{1}{2}\big(u(ab)_{\tilde{\mu}} + u(ba)_{\tilde{\mu}}\big) \qquad (4.21и)$$

В этих величинах:

$$F(abc) = f(abc) \qquad (4.22а)$$

$$F_{\tilde{\alpha}}(ab) = 0 \qquad (4.22б)$$

$$F(ab)_{\tilde{\alpha}} = u(ab)_{\tilde{\alpha}} - f(abc)g(c)_{\tilde{\alpha}} \qquad (4.22в)$$

$$F_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(a) = v(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \qquad (4.22г)$$

$$F(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \overline{F}(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \qquad (4.22д)$$

$$F_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} = W_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} + S_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} \qquad (4.22е)$$

Кривизна в общем случае принимает очень громоздкий вид:

$$\begin{aligned} R &= R_n + R_{N-n} + \frac{2W^{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\nu}}}{\sqrt{|h|}}\partial_\mu\sqrt{|h|} + \frac{2S^{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\nu}}}{\sqrt{|\eta||h|}}\partial_\mu\sqrt{|\eta||h|} + \\ &+2\partial_\mu S^{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\nu}} + \left(S^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\mu}\tilde{\alpha}}S^{\tilde{\beta}\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\beta}} - \frac{1}{4}S_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}S^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} - \frac{1}{2}S_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}S^{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}\right) + \\ &+2\left(W^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\mu}\tilde{\alpha}}S^{\tilde{\beta}\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\beta}} - \frac{1}{4}W_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}S^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} - \frac{1}{2}W_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}S^{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}\right) + \\ &-2W^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\mu}\tilde{\alpha}}\widehat{u}(bb)^{\tilde{\mu}} + 2W^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\mu}\tilde{\alpha}}g(q)^{\tilde{\mu}}P(bbq) + \\ &-2S^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\mu}\tilde{\alpha}}\widehat{u}(bb)^{\tilde{\mu}} + 2S^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\mu}\tilde{\alpha}}g(q)^{\tilde{\mu}}P(bbq) + \\ &+\widehat{u}(aa)_{\tilde{\mu}}\widehat{u}(bb)^{\tilde{\mu}} - \widehat{u}(ab)_{\tilde{\alpha}}\widehat{u}(ab)^{\tilde{\alpha}} - 2\partial_\mu\widehat{u}(aa)^{\tilde{\mu}} + \\ &-2\widehat{u}(aa)_{\tilde{\mu}}g(q)^{\tilde{\mu}}P(bbq) + 2\widehat{u}(ab)_{\tilde{\alpha}}g(q)^{\tilde{\alpha}}P(abq) + \\ &+g(p)_{\tilde{\mu}}g(q)^{\tilde{\mu}}[P(aap)P(bbq) - P(abp)P(abq)] + \\ &+v(a)^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\alpha}}v(a)^{\tilde{\beta}}{}_{\tilde{\beta}} - \frac{1}{4}v(a)_{(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}v(a)^{(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})} + \\ &-\frac{1}{4}\overline{F}(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\overline{F}(a)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + v(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\overline{F}(a)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + \\ &+\frac{2P(aaq)g(q)^{\tilde{\mu}}}{\sqrt{|\eta||h|}}\partial_\mu\sqrt{|\eta||h|} + 2P(aaq)\partial_\mu g(q)^{\tilde{\mu}} + \\ &+2g(q)^{\tilde{\mu}}\partial_\mu P(aaq) - \frac{2u(aa)^{\tilde{\mu}}}{\sqrt{|\eta||h|}}\partial_\mu\sqrt{|\eta||h|} - 2\partial(a)v(a)^{\tilde{\nu}}{}_{\tilde{\nu}} \end{aligned} \qquad (4.23)$$

где R_n и R_{N-n} - скалярная кривизна на многообразиях с метрическими тензорами $\eta_{\mu\nu}$ и h_{pq} соответственно, под $g(q)^{\tilde{\mu}}$ мы подразумеваем $\eta^{\mu\nu} g(q)_{\nu}$, а под $g(q)_{\tilde\mu}$ - $g(q)_{\mu}$ (последнее обозначение введено для однообразия и чтобы подчеркнуть, что $g(q)_{\mu}$ можно рассматривать как некоторые векторные поля на сечении X_n). Посмотрим, как выражение для кривизны изменится, если мы наложим на многообразие ряд дополнительных условий.

Будем предполагать, что $g(a)_p$ зависят только от координат x^q. В таком случае изменится вид (4.21б) и выражающиеся через него (4.21д), (4.22в,д). Само выражение для кривизны изменится не сильно:

$$\begin{aligned} R = {} & R_n + R_{N-n} + 2\left(W^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\mu\tilde\alpha} S^{\tilde\beta\tilde\mu}{}_{\tilde\beta} - \frac{1}{4} W_{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} S^{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} - \frac{1}{2} W_{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} S^{\tilde\beta\tilde\alpha\tilde\gamma} \right) + \\ & + \left(S^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\mu\tilde\alpha} S^{\tilde\beta\tilde\mu}{}_{\tilde\beta} - \frac{1}{4} S_{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} S^{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} - \frac{1}{2} S_{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} S^{\tilde\beta\tilde\alpha\tilde\gamma} \right) + 2\nabla^{(n)}_{\mu} S^{\tilde\nu\tilde\mu}{}_{\tilde\nu} + \\ & + 2W^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\mu\tilde\alpha} g(q)^{\tilde\mu} P(bbq) - 2S^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\mu\tilde\alpha} \hat u(bb)^{\tilde\mu} + 2S^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\mu\tilde\alpha} g(q)^{\tilde\mu} P(bbq) + \\ & - 2\hat u(aa)_{\tilde\mu} g(q)^{\tilde\mu} P(bbq) + 2\hat u(ab)_{\tilde\alpha} g(q)^{\tilde\alpha} P(abq) + \\ & + g(p)_{\tilde\mu} g(q)^{\tilde\mu} [P(aap)P(bbq) - P(abp)P(abq)] + \\ & + 2\nabla^{(n)}_{\mu} P(aaq) g(q)^{\tilde\mu} - \frac{1}{4} \bar F(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta} \bar F(a)^{\tilde\alpha\tilde\beta} + v(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta} \bar F(a)^{\tilde\alpha\tilde\beta} + \\ & + v(a)^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\alpha} v(a)^{\tilde\beta}{}_{\tilde\beta} - \frac{1}{4} v(a)_{(\tilde\alpha\tilde\beta)} v(a)^{(\tilde\alpha\tilde\beta)} - 2\partial(a) v(a)^{\tilde\nu}{}_{\tilde\nu} \end{aligned} \qquad (4.24)$$

(Под $\nabla^{(n)}_{\mu}$ мы подразумеваем ковариантную производную на сечении X_n). Далее, будем полагать, что $g(\alpha)_{\mu}$ зависят только от координат x^{μ}. Это значительно упрощает ситуацию, поскольку из такого условия автоматически следует, что $S_{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma} = 0$ и $v(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta} = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} R = {} & R_n + R_{N-n} + 2W^{\tilde\alpha}{}_{\tilde\mu\tilde\alpha} g(q)^{\tilde\mu} P(bbq) + \\ & + \hat u(aa)_{\tilde\mu} \hat u(bb)^{\tilde\mu} - \hat u(ab)_{\tilde\alpha} \hat u(ab)^{\tilde\alpha} - 2\nabla^{(n)}_{\mu}{}_{\mu} \hat u(aa)^{\tilde\mu} + \\ & - 2\hat u(aa)_{\tilde\mu} g(q)^{\tilde\mu} P(bbq) + 2\hat u(ab)_{\tilde\mu} g(q)^{\tilde\mu} P(abq) + \\ & + g(p)_{\tilde\mu} g(q)^{\tilde\mu} [P(aap)P(bbq) - P(abp)P(abq)] + \\ & + 2\nabla^{(n)}_{\mu} P(aaq) g(q)^{\tilde\mu} - \frac{1}{4} \bar F(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta} \bar F(a)^{\tilde\alpha\tilde\beta} \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Наконец, предположим, что можно ввести такую систему координат и такой репер, что $f(abc)$ антисимметричен по паре индексов ab; это влечет за собой равенство нулю тензора $P(abc)$, и как следствие мы имеем:

$$\begin{aligned} R = {} & R_n + R_{N-n} - \frac{1}{4} \bar F(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta} \bar F(a)^{\tilde\alpha\tilde\beta} + \\ & + \hat u(aa)_{\tilde\mu} \hat u(bb)^{\tilde\mu} - \hat u(ab)_{\tilde\alpha} \hat u(ab)^{\tilde\alpha} - 2\nabla^{(n)}_{\mu}{}_{\mu} \hat u(aa)^{\tilde\mu} \end{aligned} \qquad (4.26)$$

Если к тому же мы ограничиваемся многообразиями, на которых можно положить зависимость $g(a)_{\mu}$ от координат x^q в виде разложения

$$g(x^{\alpha}, x^q; a)_{\mu} = g(x^{\alpha})^J_{\mu} \Omega(x^q; a)_J \qquad (4.27)$$

где $\Omega(a)_J$ - семейство собственных функций оператора

$$2\delta(ab)\partial(c) - \delta(bc)\partial(a) - \delta(ac)\partial(b) \qquad (4.28)$$

с равным нулю собственным значением. (Здесь индекс J - номер функции в семействе, а в выражении (4.27) подразумевается по нему суммирование). Число функций $\Omega(a)_J$ не меньше $(N-n)$ (все $\Omega(a)_J$ – постоянные) и не более чем $(N-n)(N-n+1)/2$ (если многообразие с метрическим тензором h_{pq} - максимально симметричное). При этих условиях мы будем иметь выражение для скалярной кривизны

$$R = R_n + R_{N-n} - \frac{1}{4} \bar F(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta} \bar F(a)^{\tilde\alpha\tilde\beta} \qquad (4.29)$$

которое совпадает[6], например, с выражением из работы [20]

С другой стороны, если мы вернемся к выражению (4.23) и постулируем аналог «условия цилиндричности», т.е. независимость всех компонент репера от координат x^q (никак не ограничивая их зависимость от x^{μ}), то получим выражение

[6] С учетом, естественно, того, что тензор $\bar F(a)_{\tilde\alpha\tilde\beta}$ необходимо переписать в обозначениях g^J_{α} и $\Omega(a)_J$

$$R = R_n + R_{N-n} - \frac{1}{4}\overline{F}(a)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\overline{F}(a)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + \\ +\widehat{u}(aa)_{\tilde{\mu}}\widehat{u}(bb)^{\tilde{\mu}} - \widehat{u}(ab)_{\tilde{\alpha}}\widehat{u}(ab)^{\tilde{\alpha}} - 2\nabla^{(n)}_{\mu}\widehat{u}(aa)^{\tilde{\mu}} \quad (4.30)$$

которое совпадает с выражением из работы [14].

5. Заключение.

В этой работе мы предложили формализм комплексного репера, который удобен прежде всего тем, что устраняет некоторую избыточность стандартного реперного формализма, заключающуюся прежде всего в том, что приходится рассматривать два набора реперных полей, которые однозначно определяют друг друга. Незначительная модификация формализма, а именно переход к комплексным величинам, позволяет обойтись одним набором реперных полей, что приводит к возможности не различать при записи тензорных величин реперные и кореперные индексы. Последнее позволяет существенно упростить запись многих физических формул (особенно в случае большого числа измерений), за счет того, что реперные индексы записываются теперь (в отличии от тензорных) в скобках справа от символа физической величины, что исключает возможность перепутать реперные и тензорные индексы при чтении, записи и наборе формул. Авторы полагают, что подобная форма записи будет удобна при анализе многомерных физических теорий, в частности теорий типа Калуцы-Клейна.

Получены общие формулы для контравариантной производной и кривизны на произвольном многообразии размерности N в случае реперного и реперно-тензорного формализма, что легко позволяет записать действие для соответствующей теории. В качестве примера приведена формула для действия ОТО в форме Янга-Милса в реперном формализме. Для проверки согласованности общие формулы для кривизны в реперно-тензорном формализме сравнивались с многочисленными частными случаями, приведенными в литературе.

6. Благодарности

Авторы благодарят Э.Э. Бооса, И.П. Волобуева, Ю.В. Граца и М.Н. Смолякова за полезные обсуждения. Работа была выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 04-02-17448) и программы “Университеты России”, (грант UR.02.03.028)

Список литературы

1. Rubakov V.A., Shaposhnikov M.E. Phys. Lett. B125 (1983) 136.
2. Rubakov V.A., Shaposhnikov M.E. Phys. Lett. B125 (1983) 139.
3. Randall L., Sundrum R. Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370.
4. Lamé G. Lecons sur les coordonées curviglines et leurs divers applications. Paris, 1859.
5. Картан Е., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, 1962, (Казанский университет).
6. Картан Е., Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Изд-во Московского Университета, 1960.
7. Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Минск, Наука и техника, 1979.
8. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. Киев, Наукова Думка, 1985.
9. Соколов А., Иваненко Д.Д. Квантовая теория поля. М.-Л., Гостехиздат, 1952.
10. Родичев В.И., Теория тяготения в ортогональном репере. М., Наука, 1974.
11. Newman E.T., Penrose R. J. Math. Phys. 1962, 3, 566.
12. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М., Энергоиздат, 1982.
13. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М., т I, 1965.
14. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М., Изд-во Московского Университета, 1987.
15. Брайс С.Девитт. Динамическая теория групп и полей. М., Наука, 1987.
16. Møller C. – Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1978, v. 39, № 13.
17. Проблемы физики: классика и современность, под ред. Тредера Г.Ю., М. Мир, 1982.
18. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т.1 (Два-спинорное исчисление и релятивистские поля). М., Мир, 1987.
19. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т.2 (Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени). М., Мир, 1988.
20. Salam A., Strathdee J. Ann Phys., 1982, 141, p. 316.
21. Feruglio F., Eur. Phys. J. C33 (2004) S114.
22. Burdman G. Theries with extra dimensions. Hep-ph/0409322.

Сергей Иванович Кейзеров
Эдуард Рустямович Рахметов,

РЕПЕРНЫЙ И РЕПЕРНО-ТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Препринт НИИЯФ МГУ 2005-33/799
Работа поступила в ОНТИ 8 декабря 2005 г.

ИД № 00545 от 06.12.1999

Издательский отдел
Учебно-научного центра довузовского образования

117246, Москва, ул. Обручева, 55А
119992, Москва, Ленинские горы, ГЗ МГУ, Ж-105а
Тел./факс (095) 718-6966, 939-3934
e-mail: abiturbook@mtu-net.ru
http://www.abiturbook.da.ru

Гигиенический сертификат
№ 77.99.2.925.П.9139.2.00 от 24.02.2000
Налоговые льготы – Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 1 – 953000

Заказное. Подписано в печать
Бумага офсетная № 1. Усл.печ.л.
Тираж 50 экз. Заказ № 894

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО
в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета