**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА**

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д. В. СКОБЕЛЬЦЫНА**

**М.М. Денисов, А.А. Зубрило**

# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛАБОНЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

**Препринт НИИЯФ МГУ 2005-6/772**

**УДК 531.13:512.24**
**ББК 21.25**
**Д33**

**M.M. Denisov, A.A. Zubrilo**
**e-mail address: zbr@srd.sinp.msu.ru**

**The foudations of mathematical model for the slightly noninertial frame of reference**
Preprint SINP MSU 2005 - 6/772

The mathematical model, which permits to study the movement of massive bodies and propagation of electromagnetic waves in the Earth's frame of reference is formulated.
This model includes: the rotation of the Earth around its axis, the influence gravitational field of Earth, Sun, Moon and planets.

**Денисов М.М.**

Д33 Основы математической модели слабонеинерциальной системы отсчёта : Препринт НИИЯФ МГУ 2005 - 6/772/ М.М. Денисов, А.А. Зубрило. – М.: Изд-во УНЦ ДО, 2005. – 8 с.

Построена математическая модель, позволяющая описывать движение массивных тел и распространение электромагнитных волн в слабонеинерциальной системе отсчёта, покоящейся на поверхности Земли.
В этой модели учтены: вращение Земли вокруг своей оси, влияние на ход физических процессов собственного гравитационного поля Земли, а также приливных гравитационных полей Солнца, Луны, планет.

Как известно [1], математические модели, используемые для описания различных явлений природы с необходимостью являются идеализированными, дающими только упрощённое представление о всех взаимосвязях изучаемого явления. При построении математической модели какого-либо явления необходимо найти разумный баланс между необходимостью учесть все существенные уравнения и соотношения, описывающие изучаемое явление, и ограниченными возможностями вычислительной техники, требующими использования не очень сложных уравнений и соотношений.

Поэтому в большинстве случаев математические модели изучаемых явлений природы ограничиваются рассмотрением физических процессов в инерциальных системах отсчёта псевдоевклидова пространства-времени. Однако любая земная лаборатория не является инерциальной системой отсчёта и метрический тензор нашего пространства-времени из-за наличия гравитации не является псевдоевклидовым.

И хотя неинерциальность системы отсчёта, находящейся на поверхности Земли, является слабой, а отклонение метрического тензора от его псевдоевклидового значения – малым, тем не менее, при определённых условиях эффекты, связанные с неинерциальностью системы отсчёта и наличием гравитационного поля, могут играть существенную роль. Поэтому возникает задача разработать математическую модель слабонеинерциальной системы отсчёта, учитывающей влияние слабого гравитационного поля на физические процессы.

Для этого запишем метрический тензор $g_{ik}$ псевдориманова пространства-времени в виде:

$$g_{ik} = \gamma_{ik} + a_{ik} + b_{ik} + h_{ik}\,, \tag{1}$$

где $\gamma_{ik}$ – метрический тензор псевдоевклидова пространства - времени, записанный в инерциальной системе отсчёта, $a_{ik}$ – тензор, возникающий из-за ускоренного движения системы отсчёта, в которой проводится изучение интересующего нас явления, $b_{ik}$ – тензор, описывающий гравитационное поле Земли, $h_{ik}$ – тензор, описывающий приливное гравитационное поле Солнца, Луны и планет Солнечной системы.

Тензоры $b_{ik}$ и $h_{ik}$ в каждом конкретном случае можно получить, решая уравнения гравитационного поля общей теории относительности с постньютоновской точностью.

В декартовых координатах инерциальной системы отсчёта тензор $\gamma_{ik}$, как известно [2], имеет вид:

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тензоры $a_{ik}$, $b_{ik}$ и $h_{ik}$ мы будем называть малыми, поскольку величина каждой из их компонент значительно меньше единицы. Так как все вычисления мы будем проводить с точностью линейной по малым тензорам, то метрический тензор с контравариантными индексами $g^{ik}$ принимает вид:

$$g^{ik} = \gamma^{ik} - a^{ik} - b^{ik} - h^{ik}, \tag{3}$$

где, следуя книге [2], индексы у малых тензоров мы поднимаем с помощью метрического тензора $\gamma^{ik}$.

Определитель метрического тензора (1), с принятой точностью, запишем в виде:

$$g = \gamma\big[1 + a_i^i + b_i^i + h_i^i\big]. \tag{4}$$

В пространстве-времени с метрическим тензором (1) мы будем изучать движение массивных тел и электромагнитных волн. Для описания первых из них, в математическую модель следует включить уравнения движения в четырёхмерном виде:

$$mc\Big[\frac{dU^i}{ds} + \Gamma^i_{nk} U^n U^k\Big] = F^i, \tag{5}$$

где $m$ – масса тела, $c$ – скорость света, $U^i = dx^i/ds$ – четырёхвектор скорости, $ds = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$ – интервал, $F^i$ – четырёхвектор силы и $\Gamma^i_{nk}$ – символы Кристоффеля второго рода пространства - времени с метрическим тензором (1):

$$\Gamma^i_{nk} = \frac{1}{2} g^{im}\Big[\frac{\partial g_{mm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m}\Big]. \tag{6}$$

В псевдоевклидовом пространстве - времени компоненты четырёхвектора силы $F^i$ связаны с компонентами обычной трёхмерной силы негравитационной природы $\vec{f}$ соотношениями

$$F^i = \left\{ F^0 = \frac{(\vec{v}\vec{f})}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \vec{F} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}.$$

Гравитационная часть силы, согласно общей теории относительности, автоматически учитывается через тензоры $b_{ik}$ и $h_{ik}$.

В силу определения четырёхвектор скорости удовлетворяет соотношению $g_{ik}U^iU^k = 1$.

При использовании не декартовых координат символы Кристоффеля $\Gamma^i_{nk}$ с принятой точностью можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{nk} = & G^i_{nk} - a^{im}G_{m,nk} - b^{im}G_{m,nk} - h^{im}G_{m,nk} + \\ & + \frac{1}{2}\gamma^{im}\Big[\frac{\partial a_{mm}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial a_{nk}}{\partial x^m}\Big] + \\ & + \frac{1}{2}\gamma^{im}\Big[\frac{\partial b_{mm}}{\partial x^k} + \frac{\partial b_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial b_{nk}}{\partial x^m}\Big] + \\ & + \frac{1}{2}\gamma^{im}\Big[\frac{\partial h_{mm}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial h_{nk}}{\partial x^m}\Big],\end{aligned} \tag{7}$$

где введены обозначения $G_{m,nk}$ для символов Кристоффеля первого рода и $G^i_{nk}$ для символов Кристоффеля второго рода в криволинейных координатах инерциальной системы отсчёта псевдоевклидова пространства-времени:

$$G_{m,nk} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial \gamma_{mm}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial \gamma_{nk}}{\partial x^m}\Big], \tag{8}$$

$$G^i_{nk} = \frac{1}{2}\gamma^{im}\Big[\frac{\partial \gamma_{mm}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial \gamma_{nk}}{\partial x^m}\Big].$$

В декартовых координатах все компоненты символов Кристоффеля $G_{m,nk}$ и $G^i_{nk}$ обращаются в нуль.

Движение массивных тел в слабонеинерциальных системах отсчёта можно исследовать и на основе уравнения Гамильтона-Якоби:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2. \tag{9}$$

Для описания законов распространения электромагнитных волн и вычисления электромагнитного поля, созданного системой зарядов и токов в вакууме, в математическую модель слабонеинерциальной системы отсчёта следует включить и общековариантные уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}F^{ik}\right] &= -\,\frac{4\pi}{c}j^i\,, \\ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^n}+\frac{\partial F_{kn}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{ni}}{\partial x^k} &=0\,, \end{aligned} \tag{10}$$

где $F_{kn}$ – тензор электромагнитного поля, $j^i$ – четырёхвектор тока.

Если не интересоваться амплитудой электромагнитных волн, то в приближении геометрической оптики уравнения для лучей и законы распространения электромагнитных сигналов по лучам можно изучать на основе уравнения для изотропных геодезических:

$$\frac{dK^i}{d\sigma}+\Gamma^i_{nm}K^nK^m=0, \tag{11}$$

где $\sigma$ – некоторый аффинный параметр, $K^i = dx^i/d\sigma$ – четырёхвектор, касательный к изотропной геодезической, удовлетворяющий соотношению: $g_{nm}K^nK^m = 0$.

В ряде задач, вместо уравнения изотропной геодезической, удобнее использовать уравнение эйконала эквивалентное (11):

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=0\,. \tag{12}$$

Уравнениям и соотношениям, приведённым в данной работе, разумеется, можно придать и обычный трёхмерный вид. Собственно говоря, при решении конкретных задач общековариантные четырёхмерные тензорные соотношения (1)-(12) необходимо записать по компонентно в виде отдельных дифференциальных уравнений и алгебраических соотношений.

В частности [2], система общековариантных уравнений Максвелла (10) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\ \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sqrt{\eta}\ \vec{D}\Big)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \\ &\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\eta}}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sqrt{\eta}\ \vec{B}\Big)\,, \\ &\mathrm{div}\ \vec{D} = 4\pi\rho, \qquad \mathrm{div}\ \vec{B} = 0\,, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\eta$ – определитель трёхмерного метрического тензора

$$\eta_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}\,.$$

Входящие в уравнения (13) векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ образуют тензор электромагнитного поля $F_{ik}$. Если ввести обозначение $(\vec{g})_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00}$, то векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ могут быть получены по формулам:

$$\vec{H} = \sqrt{g_{00}}\{\vec{B} - [\vec{g},\,\vec{E}]\}, \tag{14}$$

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{g_{00}}} + \sqrt{g_{00}}\{[\vec{B},\,\vec{g}] + [\vec{g},\,[\vec{g},\,\vec{E}]\,]\}\,.$$

Плотность заряда $\rho$ и плотность тока $\vec{j}$ в слабонеинерциальных системах отсчёта удовлетворяют дифференциальному уравнению сохранения:

$$\frac{1}{c\sqrt{\eta}}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sqrt{\eta}\,\rho\Big) + \operatorname{div}\vec{j} = 0\,. \tag{15}$$

Приведённые выше уравнения и соотношения (1)-(15) составляют основу математической модели слабонеинерциальной системы отсчёта, находящейся во внешнем гравитационном поле. При решении конкретных задач эту систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Следует особо подчеркнуть, что данная математическая модель является релятивистской, так как она, в отличие от обычно используемых моделей, допускает движение массивных тел с релятивистскими скоростями, а также изучение распространения электромагнитных волн в слабоинерциальных системах отсчёта, причём учёт гравитации и релятивизма проводится в соответствии не с механикой Ньютона, а в соответствии с уравнениями общей теории относительности.

При проведении различных расчётов в астрофизике и физике планет в научной литературе использовались близкие по духу математические модели, но при ближайшем рассмотрении они имеют ряд существенных отличий. В частности, в фундаментальной монографии [3] движение массивных тел и электромагнитных волн также рассматривалось в постньютоновском приближении. Однако в отличие от нашей модели, все расчёты велись в инерциальной системе отсчёта, связанной с центром масс Солнечной системы.

Это обстоятельство создает ряд неудобств, хотя бы потому, что в реальных ситуациях наблюдатели находятся не в центре масс Солнечной системы, а на вращающейся Земле, т.е. в заведомо неинерциальной системе отсчёта. Поэтому для решения не академических, а практических задач наша математическая модель удобнее.

Математическая модель, похожая на нашу, рассмотрена и в монографии [4]. Однако в качестве основного источника неинерциальности в модели [4] рассматривается только вращение Земли. Это означает, что полностью игнорируется неинерциальность наблюдателя, связанная с его возможным движением относительно поверхности Земли. Кроме того, в модели [4] гравитация учитывается только при расчёте движения массивных тел (в ньютоновском приближении), что в ряде реальных задач оказывается недостаточным. В частности, при использовании модели [4] для описания электромагнитных волн не будут учитываться эффекты искривления световых лучей во внешнем гравитационном поле, а также гравитационное запаздывание электромагнитных сигналов.

В предлагаемой нами математической модели учтены все существенные факторы для проведения численных расчётов по изучению различных природных процессов, наблюдаемых из такой слабонеинерциальной системы отсчёта, какой является лаборатория, расположенная на поверхности Земли.

## Список литературы

1. Самарский. А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1997. - 239 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1988. - 510 с.
3. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 293 с.
4. Григорьев В.И., Григорьева Е.В., Ростовский В.С. Бароэлектрический эффект и электромагнитные поля планет и звезд. - М.: Физматлит, 2003. - 192 с.

**Михаил Михайлович Денисов,**
**Александр Андреевич Зубрило**

**Основы математической модели слабонеинерциальной системы отсчёта**

Препринт НИИЯФ МГУ 2005-6/772

**Издательство УНЦ ДО**

117246, Москва, ул. Обручева, 55-А. УНЦ ДО
Тел./факс (095) 718-6966, /718-7785 (комм.)
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
http://abiturcenter.ru/izdat

Подписано в печать 25.03.2005 г. Формат 60x90.16
Бумага офсетная № 2 Усл.п.л. 0,5
Тираж 50 экз. Заказ № 798

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО
http://abiturcenter.ru/print
В полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета